Bachillerato General Unificado

MATEMÁTICA

2.º Curso
TEXTO DEL ESTUDIANTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

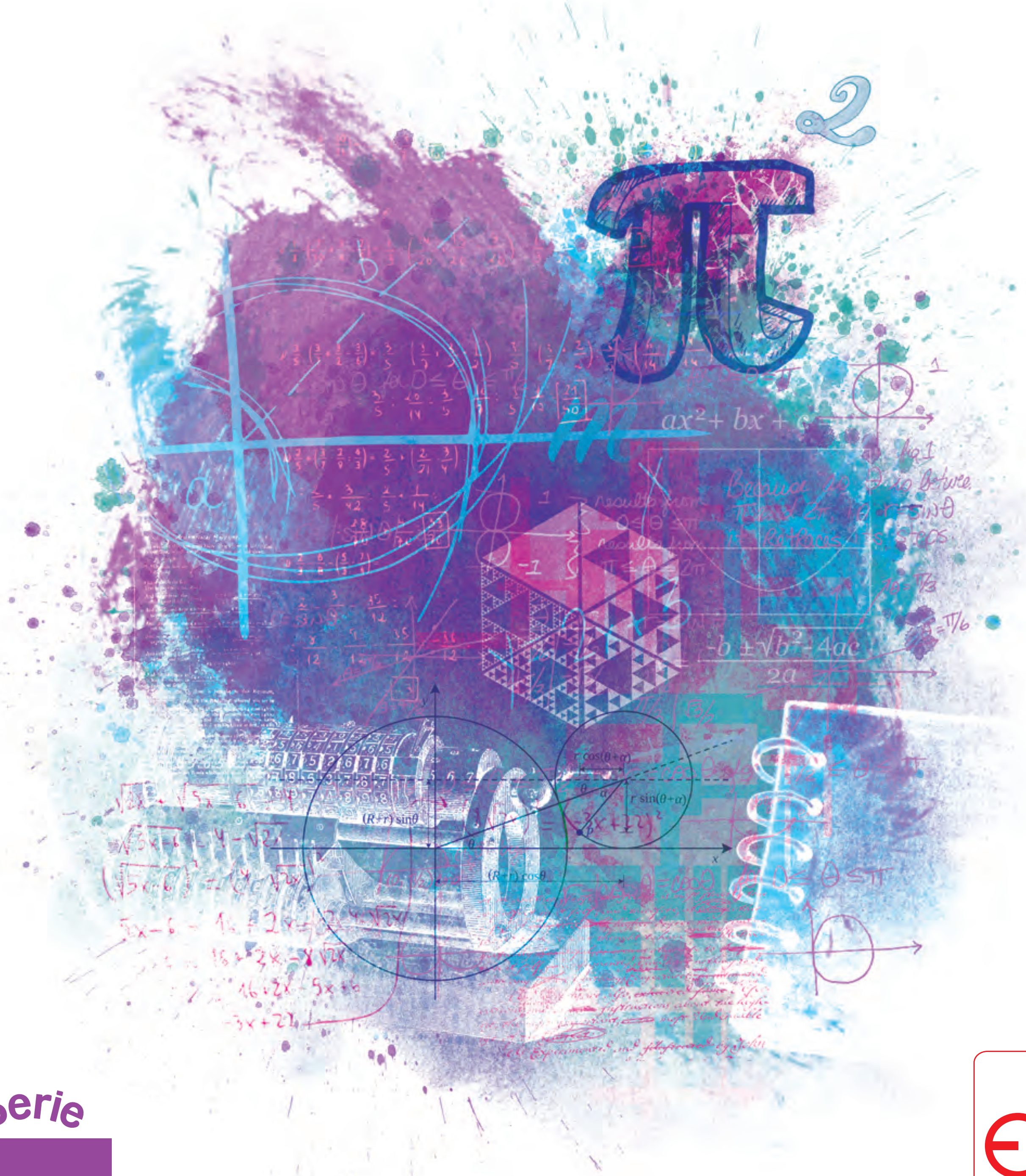
Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática

2 BGU

LNS



serie Ingenios

EDITORIAL DON BOSCO

edebé

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de Educación

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Roqueline Arguelles
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

José Francisco Vílchez Román
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé

Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

EDITORIAL DON BOSCO

ISBN 978-9978-71-992-3
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Ministerio de Educación

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el Buen Vivir.

Ministerio de Educación

2016

Presentación

Matemática 2 BGU ahora mismo es una página en blanco que, como tú, posee un infinito potencial.

Te presentamos Ingenios, el nuevo proyecto de Editorial Don Bosco que hemos diseñado para impulsar lo mejor de ti y que te acompañará en tu recorrido por el conocimiento.

Ingenios:

- Fomenta un aprendizaje práctico y funcional que te ayudará a desarrollar destrezas con criterios de desempeño.
- Propone una educación abierta al mundo, que se integra en un entorno innovador y tecnológico.
- Apuesta por una educación que atiende a la diversidad.
- Refuerza la inteligencia emocional.
- Refleja los propósitos del Ministerio de Educación que están plasmados en el currículo nacional vigente.
- Deja aflorar la expresividad de tus retos.
- Incorpora **Edibosco Interactiva**, la llave de acceso a un mundo de recursos digitales, flexibles e integrados para que des forma a la educación del futuro.
- Es sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Matemática 2 BGU te presenta los contenidos de forma clara e interesante. Sus secciones te involucrarán en proyectos, reflexiones y actividades que te incentivarán a construir y fortalecer tu propio aprendizaje. Las ilustraciones, fotografías, enlaces a páginas web y demás propuestas pedagógicas facilitarán y clarificarán la adquisición de nuevos conocimientos.

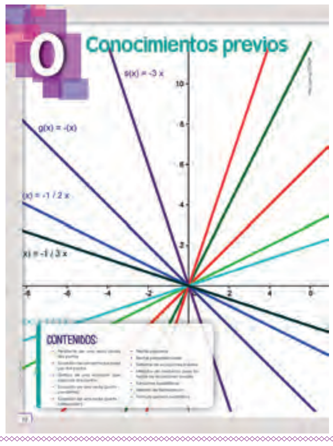
Construye con Ingenios tus sueños.

Índice

0 unidad temática

Conocimientos previos

Contenidos



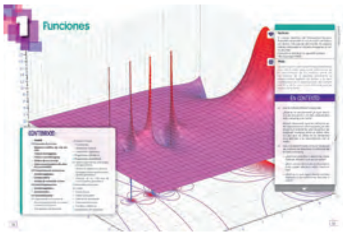
1 unidad temática

Funciones

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio.
- Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Contenidos



2 unidad temática

Funciones Trigonométricas

Objetivos

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



3 unidad temática

Derivadas de funciones reales

Objetivos

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



Algebra y funciones (90 - 127)

1. Límite y derivadas
    - La idea intuitiva de límite – Estimación numérica
    - Cociente incremental
    - Derivada de una función – notaciones - definición
    - Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites.
    - La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales.
    - Interpretación física del cociente incremental (velocidad media).
    - Interpretación física del cociente incremental (velocidad instantánea)
    - Interpretación geométrica de la primera derivada
    - La derivada de funciones polinomiales utilizando TIC
    - Derivada de una función racional mediante la definición de límites.
    - La derivada de funciones racionales utilizando TIC
    - Segunda derivada de funciones polinómicas.
    - Interpretación física de la segunda derivda (aceleración media)
    - Interpretación física de la segunda derivda (aceleración instantánea)
    - Monotonía de funciones polinomiales de grado ≤ 4
    - Análisis de intervalos (crecientes, decrecientes, y constantes)
    - Máximos y mínimos de una función

4 unidad temática

Vectores en R²

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



Geometría y medida (130 - 159)

1. Vectores en $\mathbb{R}^2$

1.1. Producto escalar entre dos vectores

1.2. Producto escalar de un vector por sí mismo

1.3. Propiedades del producto escalar

1.4. Vectores perpendiculares

1.5. Vectores paralelos

1.6. El uso de las TIC y los vectores

1.7. Norma de un vector

1.8. Distancia entre dos puntos

1.8. Ángulo entre dos vectores

2. Ecuaciónes

2.1. Ecuacióncartesianadelarecta (Forma explícita)

2.2. Ecuación de la recta en la forma paramétrica.

2.3. Ecuación de la recta en la forma vectorial.

2.4. Transformación de la forma explícita a las formas paramétrica y vectorial

2.5. Ecuación de una recta paralela a una recta conocida

2.6. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida

2.7. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida con vectores

2.8. Cálculo de la distancia entre dos puntos con vectores

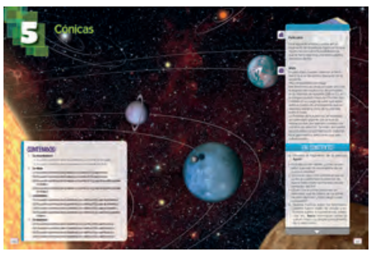
5 unidad temática

Cónicas

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



6 unidad temática

Estadistica y probabilidad

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Contenidos



Destrezas con criterio de desempeño:

Destrezas	Unidades 1	2	3	4	5	6
Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.	✓					
Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).	✓					
Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.	✓					
Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.	✓					
Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.	✓					
Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales.	✓					
Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	✓					
Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.	✓		✓			
Calcular de manera intuitiva el límite cuando $h \to 0$ de una función cuadrática con el uso de calculadora como una distancia entre dos número reales.			✓			
Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones cuadráticas a partir del cociente incremental.			✓			
Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC.			✓			
Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC.			✓			
Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función cuadrática con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).			✓			
Resolver y plantear problemas reales o hipotéticos que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, juzgando la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.			✓			
Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado ≤ 4 con apoyo de las TIC.			✓			
Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función polinomial de grado ≤ 4 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).			✓			
Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).			✓			
Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinomiales de grado ≤ 4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2 y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.			✓			
Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen.	✓					
Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conocidos otros parámetros.	✓					
Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones en general y de manera especial en el ámbito financiero de las sucesiones numéricas reales.	✓					
Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas.	✓					
Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	✓					
Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales fintas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos.	✓					
Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales.	✓					
Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.	✓					
Definir las funciones seno, coseno y tangente a partir de las relaciones trigonométricas en el círculo trigonométrico (unidad) e identificar sus respectivas gráficas a partir del análisis de sus características particulares.		✓				

Destrezas con criterios de desempeño	Unidades 1	2	3	4	5	6
• Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio y recorrido, monotonía, paridad.		✓				
• Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).		✓				
• Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.		✓				
• Graficar vectores en el plano (coordenadas) identificando sus características: dirección, sentido y longitud o norma.				✓		
• Calcular la longitud o norma (aplicando el Teorema de Pitágoras) para establecer la igualdad entre dos vectores.				✓		
• Sumar, restar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma geométrica y de forma analítica aplicando propiedades de los números reales y de los vectores en el plano.				✓		
• Resolver y plantear problemas de aplicaciones geométricas y físicas (posición, velocidad, aceleración, fuerza, entre otras) de los vectores en el plano e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.				✓		
• Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R2 como la norma del vector AB.				✓		
• Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección o a partir de dos puntos de la recta.				✓		
• Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta.				✓		
• Determinar la posición relativa de dos rectas en R2 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).				✓		
• Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector PP´) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).				✓		
• Determinar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo como aplicación de la distancia de un punto a una recta.				✓		
• Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.				✓		
• Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos en R2.				✓		
• Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano.					✓	
• Escribir y reconocer las ecuaciones cartesianas de la circunferencia, de la parábola, la elipse y la hipérbola con centro en el origen y con centro fuera del origen para resolver y plantear problemas (por ejemplo en física: órbitas planetarias, tiro parabólico, etc.) identificando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.					✓	
• Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados con apoyo de las TIC.						✓
• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.						✓
• Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).						✓
• Reconocer los experimentos y eventos en un problema de texto y aplicar el concepto de probabilidad y los axiomas de probabilidad en la resolución de problemas.						✓
• Determinar la probabilidad empírica de un evento repitiendo el experimento aleatorio tantas veces como sea posible (50, 100,... veces) con apoyo de las TIC.						✓
• Realizar operaciones con sucesos: unión, intersección, diferencia y complemento, leyes de De Morgan en la resolución de problemas.						✓
• Aplicar los métodos de conteo: permutaciones, combinaciones para determinar la probabilidad de eventos simples y a partir de ellos la probabilidad de eventos compuestos en la resolución de problemas.						✓
• Reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados y calcular la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones aplicando el teorema de Bayes en la resolución de problemas.						✓
• Reconocer variables aleatorias discretas cuyo recorrido es un conjunto discreto en ejemplos numéricos y experimentos y la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta como una función real a partir del cálculo de probabilidades acumuladas definidas bajo ciertas condiciones dadas.						✓
• Calcular e interpretar la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta.						✓
• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas que involucren el trabajo con probabilidades y variables aleatorias discretas dentro del contexto del problema.						✓

Fuente: http://goo.gl/zMymHY (Ministerio de Educación del Ecuador 2016).

El proyecto de **Matemáticas** 2

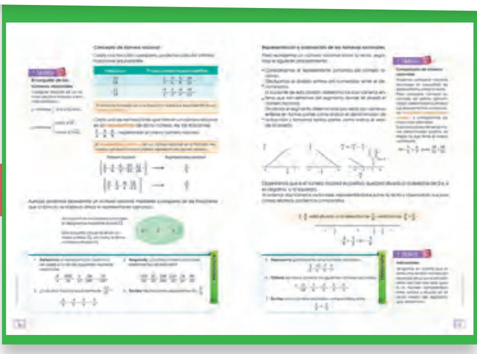
Conoce tu libro

En contexto



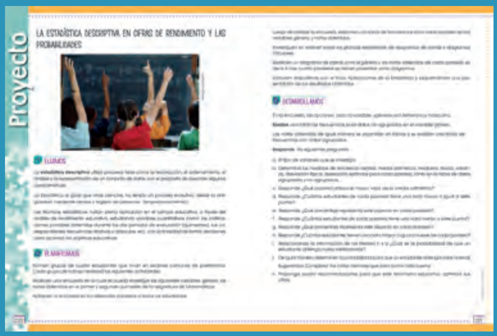
- Noticias y enlaces que contextualizarán la temática a abordar.

Los contenidos



Los contenidos tendrán:
- Situaciones contextualizadas
- Soporte visual
- Uso de regletas y ábacos para facilitar la comprensión

Proyecto

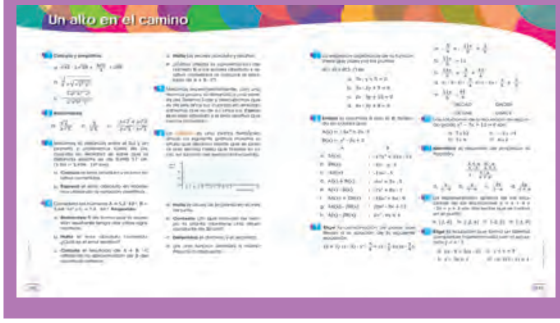


Zona Wifi



- En esta página verás cómo el tema es tratado en la red.

Un alto en el camino



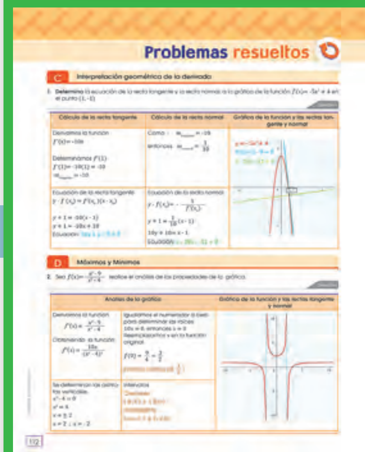
- Actividades de base estructurada.

Resumen



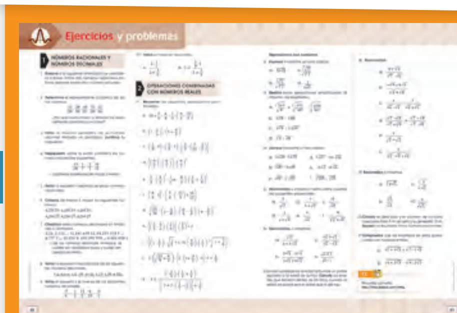
- Síntesis de lo aprendido.

Problemas resueltos



- Énfasis en la presentación clara de los procedimientos.

Ejercicios y problemas



- Para fortalecer tu aprendizaje, dispondrás de varios ejercicios.

Para finalizar

Evaluando tus destrezas



Autoevaluación

- Propuesta al final de cada quimestre.

¿Qué significan estos íconos?

EN GRUPO:

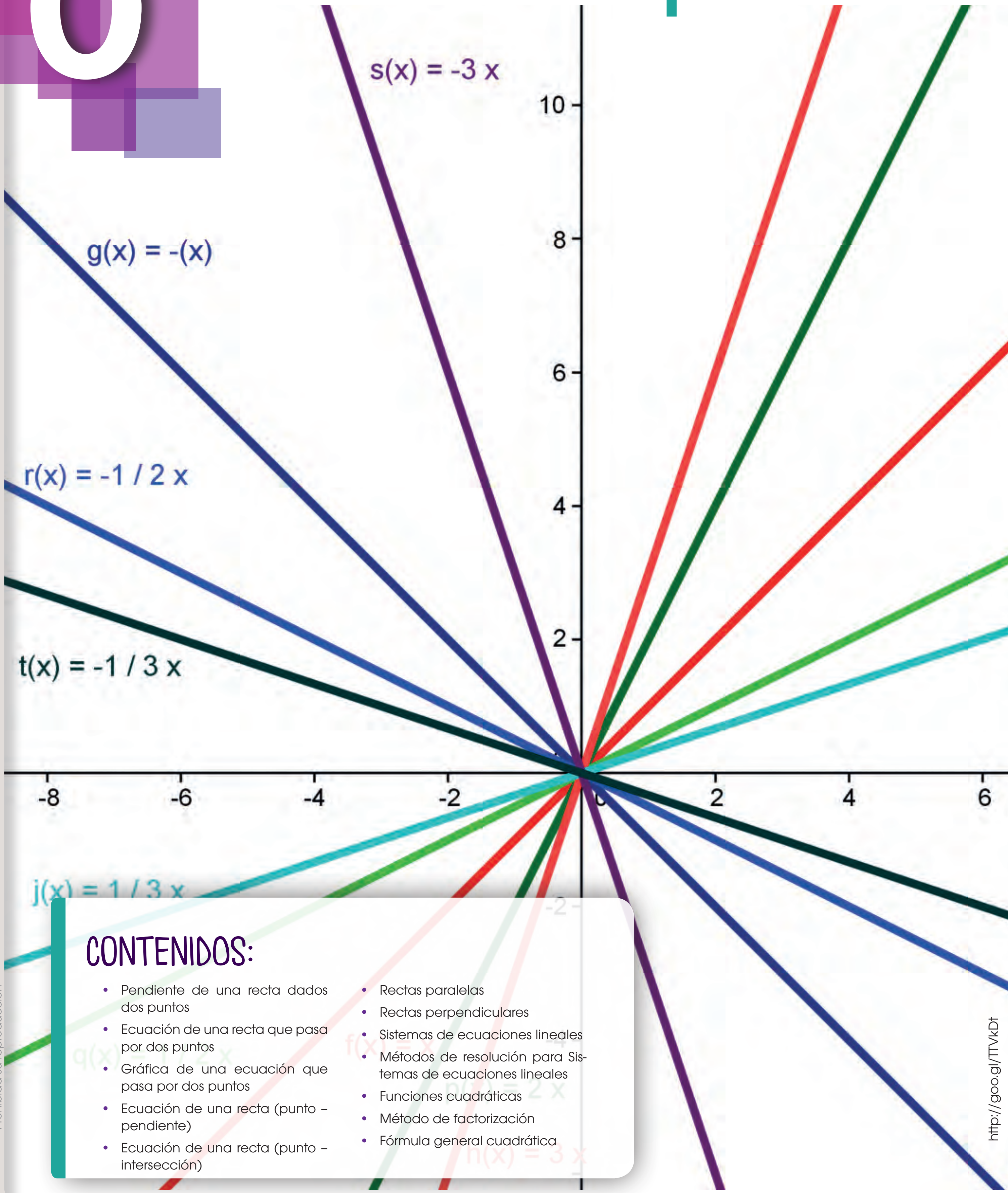
Y TAMBIÉN:

TIC

Conéctate con: Edibosco Interactiva

Actividades interactivas · Enlaces web · Videos · Perfiles interactivos · Documentos · Presentación multimedia · Colaboratorios

0 Conocimientos previos



http://goo.gl/TTVkDt

CONTENIDOS:

- Pendiente de una recta dados dos puntos
- Ecuación de una recta que pasa por dos puntos
- Gráfica de una ecuación que pasa por dos puntos
- Ecuación de una recta (punto – pendiente)
- Ecuación de una recta (punto – intersección)
- Rectas paralelas
- Rectas perpendiculares
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Métodos de resolución para Sistemas de ecuaciones lineales
- Funciones cuadráticas
- Método de factorización
- Fórmula general cuadrática

REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1 Ecuaciones lineales

1. Sean los puntos, determina el valor de la pendiente.

a. $(-2, 7)$ y $(1, 8)$

b. $(2, 6)$ y $(5, 9)$

c. $(-4, 4)$ y $(2, -8)$

d. $(3, -1)$ y $(2, 0)$

e. $\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(-\frac{2}{4}, \frac{7}{4}\right)$

f. $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(5, -5\frac{1}{4}\right)$

2. Determina la ecuación de la recta en forma general, que pasa a través de los puntos.

a. $(0, 2)$ y $(6, 0)$

b. $(-2, -2)$ y $(-6, 0)$

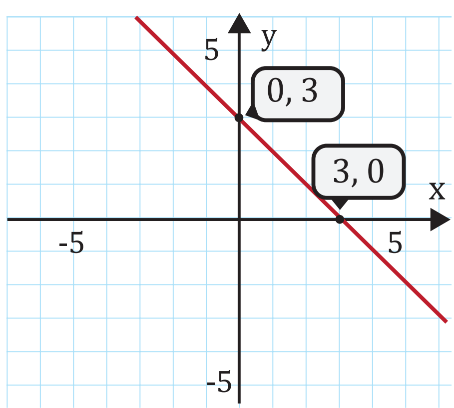
c. $\left(-\frac{12}{5}, 0\right)$ y $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

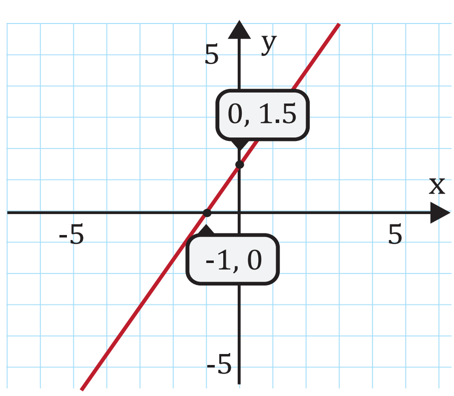
d. $(-4, 0)$ y $(0, 12)$

e. $\left(\frac{13}{2}, -10\right)$ y $(-8, 19)$

f. $(0, 4)$ y $(2, -10)$

3. Considerando las siguientes gráficas, establece la ecuación de la recta.





4. Según los elementos que describen a una recta, determina la ecuación de la misma.

a. Punto $(5,17)$ y pendiente $= 4$

b. Puntos $(-3, 0)$ y $(0, -3)$

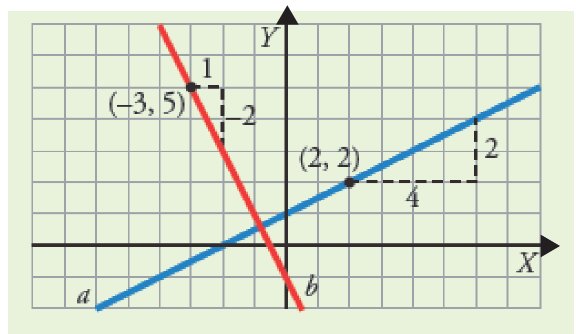
c. $m = -5$ e intersección con el eje $y = -2$

d. $m = 4$ y Punto $(3, 7)$.

e. $m = -\frac{2}{3}$ y $P(-2, 5)$

f. $N(-2, 5)$ y $m = \frac{1}{5}$

5. Escribe la ecuación de las rectas a y b.



6. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

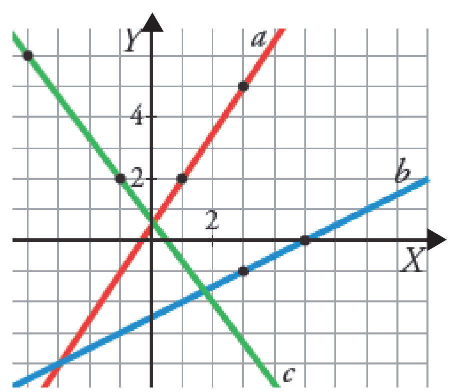
a. $P(4, -3)$, $m = 4$

c. $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

b. $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

d. $P(0, 0)$, $m = -1$

7. Determina la ecuación de las siguientes rectas:



8. Una recta pasa por el punto $A(-1, 3)$ y por el punto $P(2, 5)$. Escribe su ecuación punto pendiente.

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, 2)$

10. Considerando las siguientes ecuaciones determina el valor de la pendiente, intersección.

a. $5x + 4y = 2$
b. $5x+4y=2$
c. $2x+3y+7=0$
d. $-y + 2x - 12 = 0$

2 Líneas Paralelas y Perpendiculares

11. ¿Cuáles son las características de las representaciones gráficas de las líneas paralelas? ¿Y de las perpendiculares?

12. ¿Cuál es la relación de las pendientes en las líneas paralelas? ¿Y en las líneas perpendiculares?

13. Identifica ¿Cuál de los siguientes pares de rectas son líneas paralelas? Y, ¿cuáles son líneas perpendiculares? O Ninguno.

a. $x + 3y = 20$; $x + 3y = -2$
b. $2x + y = 2$; $-x + 2y = -3$
c. $-4x + 3y = 19$; $3x + 4y = -2$
d. $-9x - 3y = -1$; $x + 3y = -1$

14. Demuestra que los siguientes puntos pertenecen a la misma recta, utilizando el cálculo de las pendientes.

a. $(0,-12)$, $(6,0)$, $(14,20)$
b. $(30,6)$, $(0,-6)$, $(15,0)$
c. $(-5,0)$, $(0,-3)$, $(-30,15)$

15. A continuación se presentan ejercicios que vinculan las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares. Analiza el enunciado propuesto y resuelve los siguientes ejercicios.

a. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, -4)$ y que es paralela a la recta que tiene por ecuación $3x + 5y = -15$

b. Determina la ecuación de la recta que pasa a través del punto $(-3, 1)$ y que es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $2x + 4y = 7$

c. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es : $3x - y = -12$

d. Determina la ecuación de la recta de tal manera que pase por el punto de intersección entre las rectas : $x + y = 2$ con $4x - y = 3$ y que sea perpendicular a la segunda recta mencionada.

e. Determina la pendiente que se obtiene entre los puntos de intersección de las rectas $5x + 3y = 2$; $3x - 2y = 5$ con la intersección rectas $x - 2y = 2$; $4x - y = 1$.

16. Hallar una recta paralela y otra perpendicular a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$, que pasen por el punto A$(3, 5)$.

17. Calcula k para que las rectas $r \equiv x + 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - ky + 4 = 0$, sean paralelas y perpendiculares.

18. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A$(1, 3)$ y B $(2, -5)$

19. Calcula una recta paralela a la recta $r \equiv y = -2x + 1$ que pase por el punto $(4, -1)$

20. Calcula una recta paralela a la recta $r \equiv y = \frac{3}{2}x + 2$ que pase por el punto $(-2, 1)$

21. Calcula una recta que sea paralela a la recta $r \equiv 3x + 2y - 7 = 0$ que pase por el punto $(0, -3)$

22. Calcula la recta paralela a la recta $r \equiv x - y + 4 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

23. Comprueba si las recta $r \equiv 2x - 3y - 1 = 0$ y la recta $s \equiv -6x + 9y - 5 = 0$ son paralelas

24. Entre estas rectas, ¿cuál no es paralela a las otras dos?

$r \equiv y = \frac{4}{3}x - \frac{6}{5}$

$s \equiv 3x - 4y + 2 = 0$

$t \equiv 8x - 6y - 3 = 0$

25. Comprueba si la recta $r \equiv x - 2y + 9$ y la recta s que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(7, 2)$, son paralelas.

26. Comprueba si las rectas r: que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(4, 7)$ y s: que pasa por los puntos $(-1, -4)$ y $(5, 2)$, son paralelas

3 Sistemas de ecuaciones lineales

27. Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta según corresponda.

a) Al resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}$

a. El tipo de soluciones que se obtiene es:

- Inconsistente
- Soluciones infinitas
- Solución única
- No tiene solución

b. Para un sistema compatible determinado, las rectas que se obtienen al graficar son:

- Coincidentes
- Secantes
- Intersecantes
- No intersecantes

c. Al despejar la variable "y", en la primera y segunda ecuación del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

se obtiene, respectivamente:

- $y = 10 - x$; $y = 2 - x$
- $y = 10 + x$; $y = -2 - x$
- $y = -10 + x$; $y = 2 - x$
- $y = -x + 10$; $y = -2 + x$

d. El conjunto solución del sistema

$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

es:

- $(1; 2)$
- $(-1; 2)$
- $(1; -2)$
- $(2; 1)$

e. Aplicando el método de igualación e igualando la variable y para el sistema

$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

resulta:

- $5 - x = 11 + 3x$
- $5 + x = 11 + 3x$
- $-5 - x = 11 - 3x$
- $5 - x = 11 - 3x$

f. En el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}$

despejando x en la primera ecuación resulta:

- $x = -2y + 3$
- $x = -2y - 3$
- $x = 3y + 2$
- $x = 2y + 3$

g. Aplicando el método de igualación e igualando la variable x para el sistema

$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, la expresión que resulta es :

- $9 + 4y = 5 + 2y$
- $9 - 4y = 5 - 2y$
- $-9 - 4y = 5 + 2x$
- $4 - 9y = 5 - 2y$

h. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas para el sistema de ecuaciones?

$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

- El gráfico del sistema muestra dos rectas paralelas.
- El gráfico del sistema muestra una sola recta
- El gráfico del sistema muestra dos rectas que se intersecan en el primer cuadrante.
- El gráfico del sistema muestra dos rectas que se intersecan en el cuarto cuadrante.

i. Al resolver el sistema de ecuaciones

$\begin{cases} -x + y = 6c \\ x + y = 3c \end{cases}$ en función de c la respuesta es:

- $x = -\frac{3}{2}c$; $y = -\frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c$; $y = -\frac{9}{2}c$
- $x = -\frac{3}{2}c$; $y = \frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c$; $y = \frac{9}{2}c$

28.Resuelve por sustitución, igualación, reducción y gráficamente los sistemas:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = x - 1 \\ \dfrac{x-y}{2} = y + 1 \end{cases}$

29.Halla las soluciones del sistema $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$

30.Resuelve $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$

31.Resuelve $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

32.Resuelve el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$

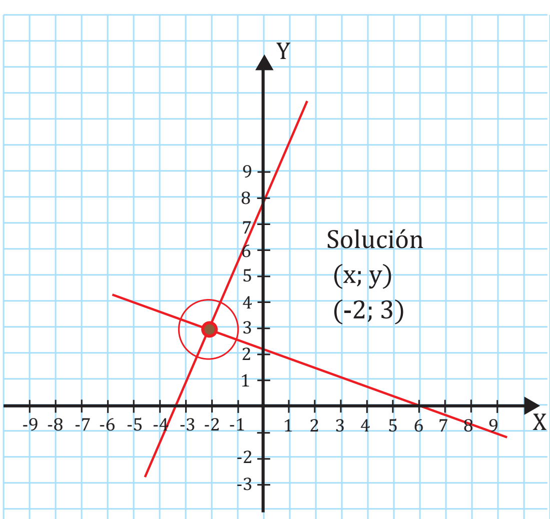
33.Halla las soluciones el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 0 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{x+y+2}{4} = 1 \end{cases}$$

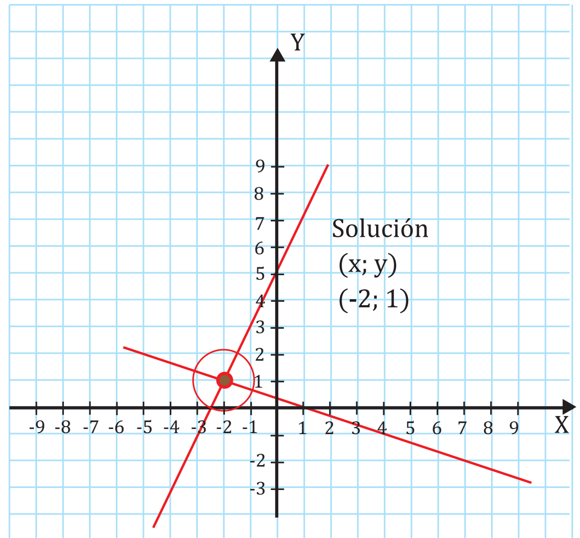
34.Al resolver el sistema : $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

Utilizando el método gráfico, resultará:

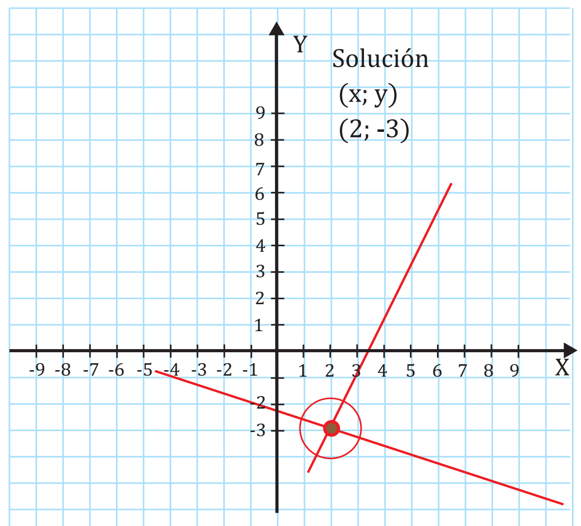
a.



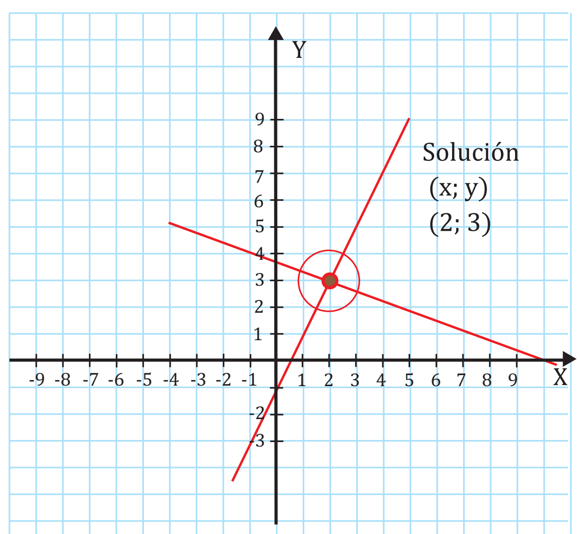
b.



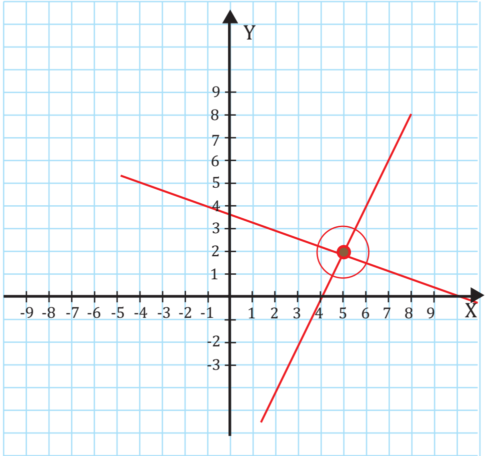
c.



d.



35.La solución gráfica a continuación, a cuál sistema de ecuaciones lineales pertenece.



a. $5x - 2y = 29$
$2x - 3y = 4$

b. $5x + 2y = 29$
$2x - 3y = -4$

c. $5x + 2y = 29$
$2x - 3y = 4$

d. $5x + 2y = -9$
$2x + y = -4$

4 Función Cuadrática

36. **Factoriza** las siguientes expresiones cuadráticas:

a. $x^2 - 9$

b. $x^2 - 25y^2$

c. $x^2 - 2x + 1$

d. $x^2 + 16x + 64$

e. $x^2 - 8x$

f. $- 4x^2 - 16x$

g) $x^2 + 8x + 7$

h) $x^2 - x - 6$

37. Determina el vértice de las siguientes funciones.

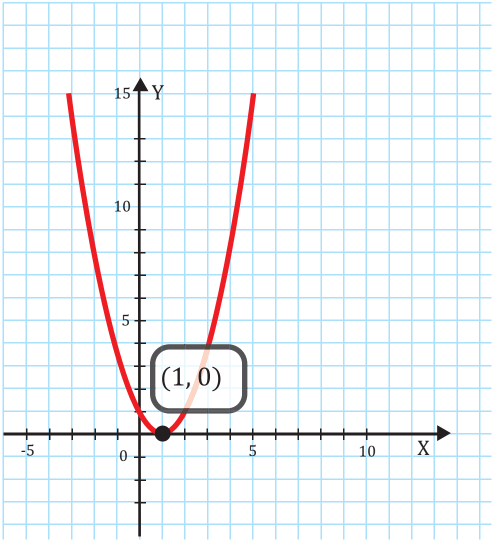
a. $f : x \to f(x) = 2x^2 - 4x + 6$

b. $f : x \to f(x) = -x^2 + 3x - 6$

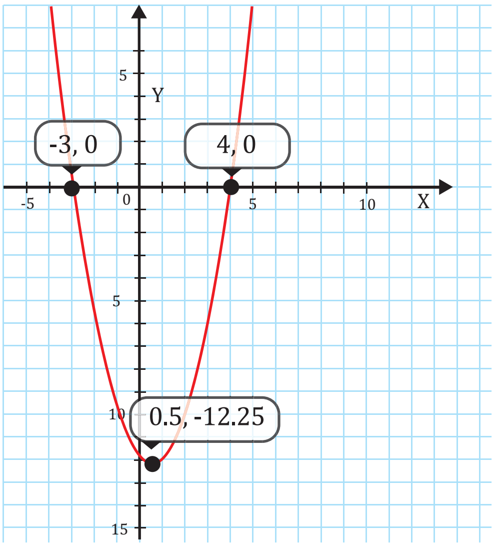
c. $f : x \to f(x) = x^2 - 4$

d. $f : x \to f(x) = 4x^2 - 16x$

38. Considerando las siguientes gráficas, determina la ecuación correspondiente.

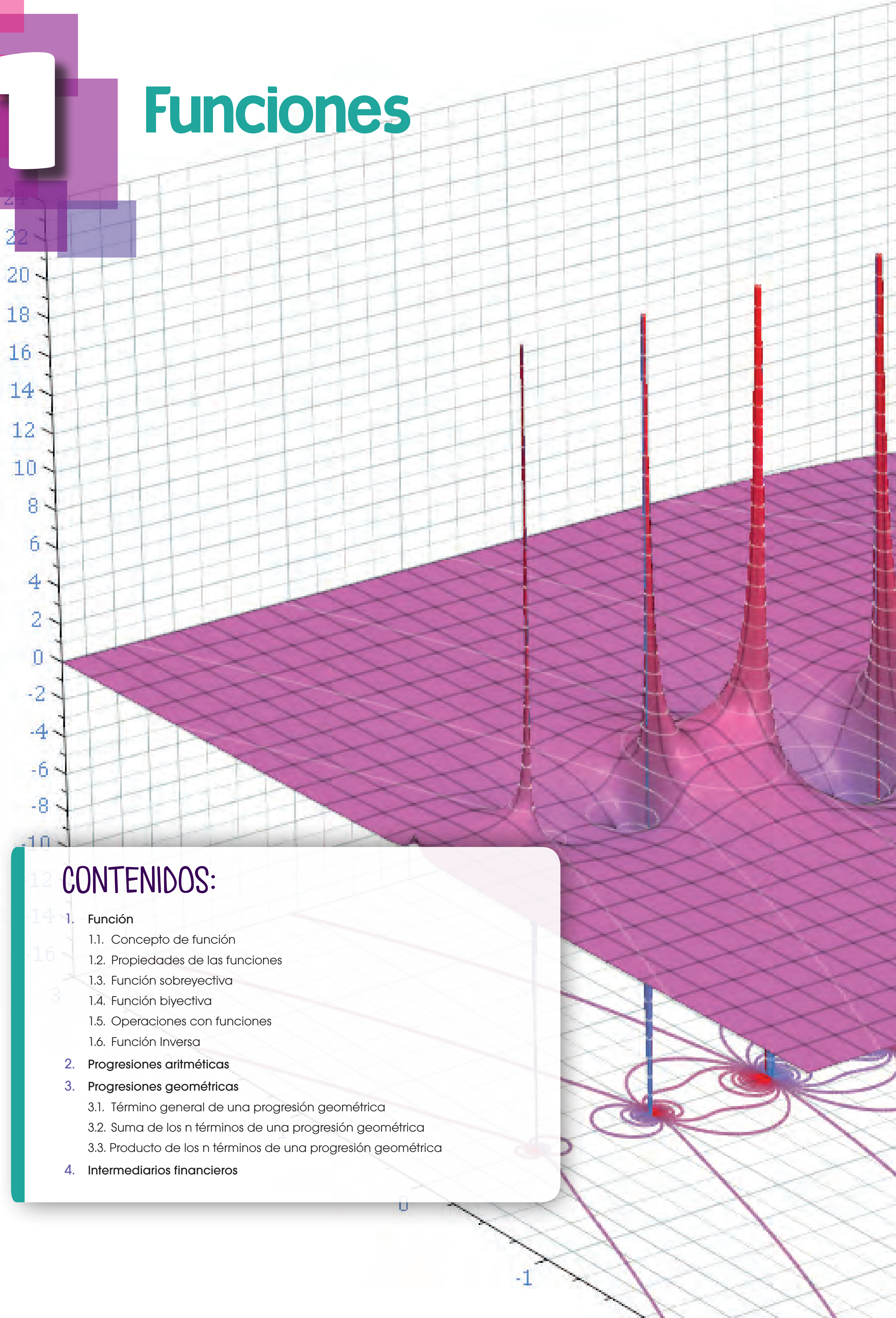


Ecuación:...



Ecuación:...

1 Funciones



CONTENIDOS:



http://goo.gl/n17z37

Noticia

El consejo directivo del Observatorio Europeo Austral ha aprobado la construcción del telescopio óptico más grande del mundo. El proyecto planea instaurarse en el cerro Amazones, al norte de Chile.
Consulta la noticia en el siguiente enlace:
http://goo.gl/LdHsQ5

Web

La observación y las herramientas matemáticas han sido la base para poder evolucionar en el conocimiento de las distintas ramas de las ciencias. En el siguiente documento se explica cómo Aristarco de Samos y su obra contribuyeron a la determinación del tamaño del Sol y de la Luna, y las distancias que les separa de la Tierra.
http://links.edebe.com/cww

EN CONTEXTO

a. Lee la noticia anterior y responde:

¿Qué es un exoplaneta? ¿A qué distancia se encuentran los tres exoplanetas más cercanos a la Tierra?

Habrás observado que las distancias están expresadas en años-luz, pero ¿es esta magnitud realmente una magnitud de longitud? Averigua cómo se define año-luz, por qué se utiliza en las distancias muy grandes y su equivalencia con el metro.

b. Lee con detenimiento cómo en la época de Aristarco se determinó la distancia de la Tierra a la Luna.

- ¿Qué herramientas y relaciones matemáticas utilizaron que ya conocías?
- ¿Qué nuevas relaciones se propusieron para poder efectuar estas mediciones?
- ¿Qué es lo que sigue siendo confuso respecto a las mediciones llevadas a cabo?

I. FUNCIÓN

1.1. Concepto de función



http://goo.gl/WJZ0bz



https://goo.gl/WFRHN8

En las actividades de nuestro diario vivir, nos encontramos frente a diferentes situaciones tales como cancelar el valor de compra de nuestros víveres, que depende de la cantidad de artículos que compramos; o que el valor a pagar del recorrido en taxi dependerá de la distancia del viaje; o el costo de realizar una llamada telefónica dependerá de factores como la duración, la región o el país donde nos vamos a comunicar.

En todas las circunstancias mencionadas se concibe una relación de correspondencia en la que intervienen números.

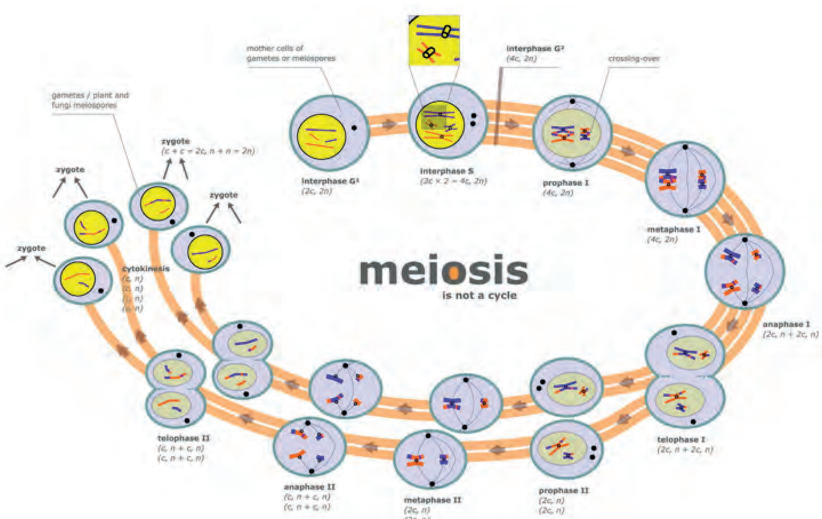
Sin embargo, hay situaciones en las cuales las relaciones de dependencia no vinculan un valor numérico, como por ejemplo, la asignación del lugar de destino de viaje a cada pasajero, o el sector de sufragio de cada ciudadano.

Llamamos función f del conjunto A en el conjunto B a una relación de dependencia en la que a cada elemento x de A le corresponde un único elemento y de B.

Se simboliza mediante la notación:

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$



https://goo.gl/njlp5q

Además, una de las notaciones más utilizadas es : $y = f(x)$

Que se lee «y es igual a f de x», esta notación no significa «f multiplicado por x», sino que es una manera de indicar que y corresponde a x.

Expresión analítica de una función

Al conjunto A se le llama conjunto de salida y al conjunto B, conjunto de llegada.

Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento y del conjunto B, decimos que y es la imagen de x por la función *f*, o que x es una antiimagen de y por la función *f*.

En la figura se representa una funciónmediante diagramas de Venn.

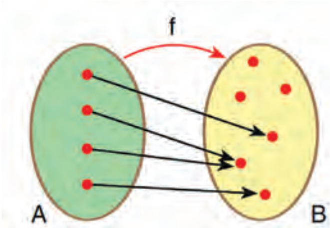


Fig. 1.

Observa que todos los elementos de A tienen una única imagen, pero que no todos los elementos de B han de tener antiimagen, ni esta ha de ser única.

Una función se puede interpretar mediante una expresión matemática que permite calcular las imágenes de los elementos del conjunto de salida y las antiimágenes de los elementos del conjunto de llegada.

Esta expresión matemática se convierte en una «fórmula» que se deriva del lenguaje algebraico; por ejemplo, considerando la situación de función en los números reales, al asignar a cada número real el triple del cuadrado de un número aumentado en 5. Es posible definir la función.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$$

Cálculo de imágenes

En la función anterior $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$

Para calcular la imagen respectiva de cualquier elemento x del conjunto de salida, basta con sustituir el valor considerado para x.

Si $x = -1$; $f(-1) = 3(-1)^2 - 5 = -2$

Así , -2 es la imagen de -1.

Escribiremos: $f(-1) = -2$

Actividades

1. Considerando las siguientes funciones, calcula sus respectivas imágenes para $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{2}$

   a. $f : x \to f(x) = 4x^2 + 2$

   b. $g : x \to g(x) = -2x^2 + 2$

   c. $h : x \to h(x) = \sqrt{2} - 2x^2$

Y TAMBIÉN: ¿?

Lenguaje matemático

Las funciones suelen representarse por las letras f, g, h...

Y TAMBIÉN: ¿?

Variable independiente y variable dependiente

En la expresión:

$$y = f(x)$$

- A x se le llama variable independiente.
- A y se le llama variable dependiente.

Cálculo de antiimágenes

Para calcular la antiimagen o las antiimágenes de cualquier elemento y del conjunto de llegada, debemos reemplazar, esta vez, el valor considerado para y.

Ejemplo 1

En la función: $f : x \rightarrow f(x) = 3x^2 - 5$, Si y = 4, tenemos que:

$4 = 3x^2 - 5$ Reemplazamos de y = 4

$9 = 3x^2$ Transponemos – 5

$\frac{9}{3} = x^2$ Dividimos para 3.

$\sqrt{\frac{9}{3}} = |x|$

$\pm\sqrt{3} = x$

Luego $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ son las antiimágenes de 4

Escribiremos: $f^{-1}(4) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Y TAMBIÉN ¿?



https://goo.gl/x8JvyG

Gottfried W. Leibniz

Matemático alemán (1646-1716).
Miembro fundador, entre otras, de la Academia de Ciencias de Berlín. A él se debe el término función, así como buena parte de la notación que hoy en día utilizamos en el estudio de las funciones.

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leibniz.htm

Ejemplo 2

Escribimos la expresión analítica de la función f que asigna a cada número real el triple de su cuadrado, disminuido en una unidad.

- Calculamos la imagen de 1 por f.
- Calculamos las antiimágenes de - 4 por f.

La expresión analítica de la función es: $f(x) = 3x^2 - 1$.

- Para calcular la imagen de $x = 1$ sustituimos x por 1 en la expresión analítica de $f : f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 2$
- Para calcular las antiimágenes de y = -4 debemos sustituir $y = f(x)$ por - 4 y despejar x en la expresión $f(x) = 3x^2 - 1$.

Se tiene:

$-4 = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 = -3$
$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow |x| = \sqrt{-1}$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Luego, - 4 no tiene ninguna antiimagen real. Escribiremos: $f^{-1}(-4) = \emptyset$

Actividades

2. Sean las funciones siguientes, determina las antiimágenes para $-1, 0, 1, \sqrt{2}$.

a. $f : x \rightarrow f(x) = 2x^2 - 2$ b. $f : x \rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

Gráfica de una función

Dada una función f, se dice que el dominio de f son todos aquellos valores de x para los cuales está definida la función. Por tanto para cada elemento de x que pertenece a ese dominio, podemos considerar al par (x, y), donde $y = f(x)$. Se simboliza como: $D(f)$

Observa los ejes de coordenadas de la figura. Representamos en el eje de abscisas el conjunto de valores de x, y en el eje de ordenadas, el conjunto de valores de $y = f(x)$.

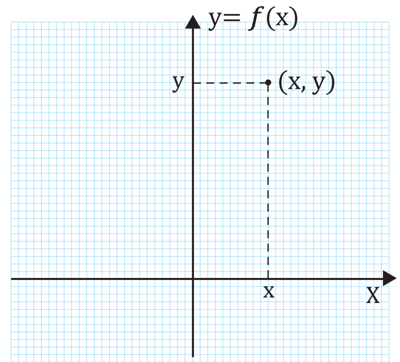


Fig. 2.

> La gráfica de una función f es la representación en unos ejes de coordenadas de todos los pares de la forma $(x, f(x))$, siendo x un elemento del dominio de f.

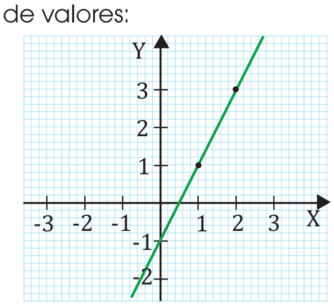
En la práctica, no es posible representar todos los pares $(x, f(x))$, ya que, en general, son infinitos. Por ello, se suelen representar unos cuantos puntos significativos y trazar el resto de la gráfica según las propiedades de la función.

Ejemplo 3

Representamos gráficamente la función $f : x \rightarrow f(x) = 2x - 1$.

Construimos una tabla con varios pares de valores:

x	0	1	2
$y = f(x)$	-1	1	3
$(x, f(x))$	(0,-1);	(1,1);	(2, 3)



Al representar estos pares de valores en unos ejes de coordenadas, se obtienen puntos alineados

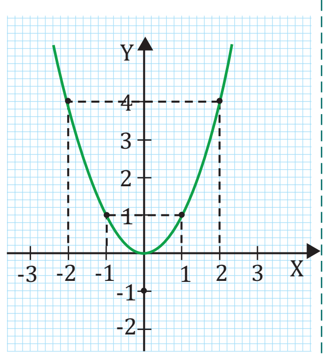
Asimismo, la gráfica de una función permite hallar fácilmente sus imágenes y antiimágenes.

Ejemplo 4

Sea f la función representada en la figura. Hallemos:

a. La imagen por f de $x = -2$ y $x = 2$.

b. Las antiimágenes por f de $y = -1$ e $y = 1$.



Resolvemos:

a. Los puntos de la gráfica de abscisas -2 y 2 tienen ordenada 4. Luego:

$f(-2) = 4$; $f(2) = 4$

b. No existe ningún punto de la gráfica de ordenada -1, mientras que hay dos puntos de ordenada 1 cuyas abscisas son -1 y 1. Luego:

$f^{-1}(-1) = \varnothing$; $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$

Y TAMBIÉN: ¿?

Al representar gráficamente una función no siempre se obtiene un trazo continuo. En estos casos debemos indicar si los puntos donde el trazo se interrumpe pertenecen o no a la gráfica.
Observa:

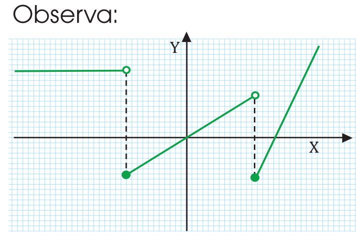


Fig. 3.

Los puntos señalados con el símbolo ● pertenecen a la gráfica de la función.
Los puntos señalados con el símbolo ○ no pertenecen a la gráfica de la función.

Actividades

3. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a. $f : x \rightarrow f(x) = -2$

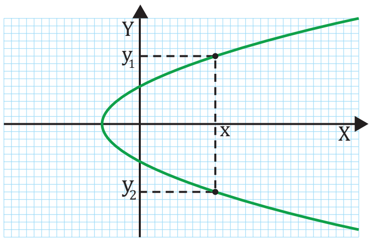
b. $f : x \rightarrow f(x) = -2x + 5$

c. $f : x \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3$

Determinación gráfica del dominio y el recorrido

Y TAMBIÉN: ¿?

La siguiente gráfica no representa ninguna función, puesto que a un elemento del dominio le corresponde más de una imagen.



■ Fig. 4.

Una gráfica representa una función si y sólo si cualquier recta vertical corta a la gráfica, como máximo, en un punto.

Dada una función f, se dice que su recorrido son todos los valores definidos de "y" para los cuales le corresponde, a cada uno de ellos, un valor de x determinado que pertenece a su dominio. Se simboliza como: $R(f)$

Para determinar el dominio y el recorrido de una función a partir de su gráfica, nos fijaremos en todos los pares de números reales de la forma (x, y) representados.

- Un número real $x = a$ es del dominio de una función si y sólo si la recta vertical $x = a$ corta a la gráfica en un punto.
- Un número real $y = b$ es del recorrido de una función si y sólo si la recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica en al menos un punto.

Ejemplo 5

Hallar el dominio y el recorrido de la función $f: x \rightarrow f(x) = \sqrt{x+1}$ y represéntala gráficamente.

- Determinemos el dominio y el recorrido a partir de la gráfica y comprueba que coinciden con los hallados previamente.

Para que la imagen de x por la función f sea un número real, es necesario que el radicando sea positivo o cero, es decir, $x + 1 \geq 0$. Por tanto, el dominio es:

$$D(f) = [-1, +\infty)$$

Sólo son imágenes por la función los números reales positivos o cero, es decir, $y \geq 0$. Por tanto, el recorrido es:

$$R(f) = [0, +\infty)$$

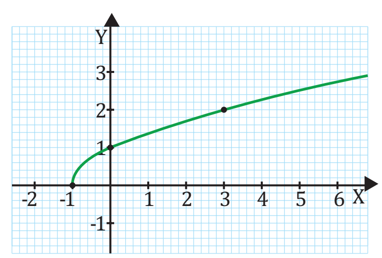
Para representar gráficamente la función, construimos una tabla con unos cuantos pares de valores:

x	-1	0	3
$f(x)$	0	1	2
$(x, f(x))$	(-1, 0)	(0,1)	(3,2)

■ Tabla 1.

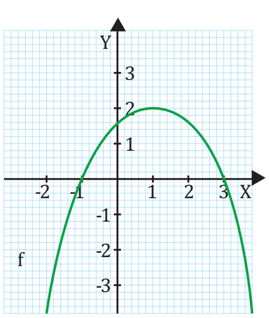
Al representar estos pares de valores en unos ejes de coordenadas, obtenemos diversos puntos del plano situados sobre un arco de parábola.

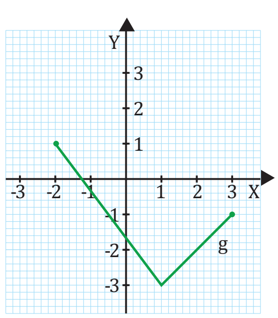
Observa que una recta vertical $x = a$ corta a la gráfica si $a \geq -1$, y una recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica si $b \geq 0$. Luego, el dominio y el recorrido coinciden con los hallados previamente.

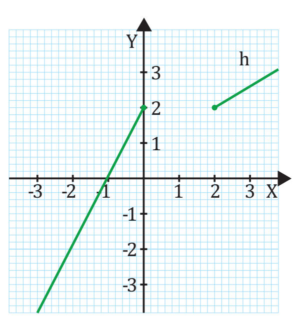


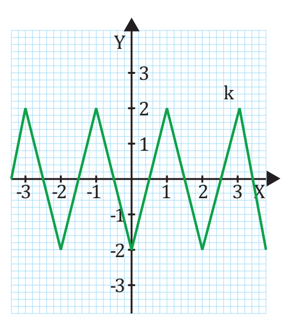
Actividades

4. Determina el dominio y el recorrido de cada una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.









1.2. Tipos de funciones

Veamos a continuación algunas características de las funciones que podemos extraer a partir de la observación de su gráfica.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Observa en la figura 5 las gráficas de $g : x \rightarrow g(x) = x^2$ y $h: x \rightarrow h(x) = 2x$:

— Podemos trazar al menos una recta horizontal sobre la gráfica de la función g que la intercepte en más de un punto.

Así, si consideramos la recta horizontal $y = 4$, vemos que existen dos elementos diferentes del dominio de g, $x = -2$ y $x = 2$, que tienen la misma imagen, $g(x) = 4$.

— Cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica de la función h la intercepta como máximo en un punto.

Así, sea cual sea la recta horizontal que consideremos, vemos que no existen elementos diferentes del dominio de h que tengan la misma imagen.

> Una función $f: A \mapsto B$ es **inyectiva** si dos elementos distintos cualesquiera de su dominio tienen imágenes distintas por f, es decir, si se cumple:
>
> $$\forall x_1, x_2 \in A;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Luego h es inyectiva, mientras que g no lo es.

Considera de nuevo las funciones representadas en la figura 5:

— El recorrido de g es el conjunto de los números reales mayores o iguales que cero, es decir, $R(g) = [0, +\infty)$.

— El recorrido de h es el conjunto de todos los números reales, es decir, $R(h) = \mathbb{R}$.

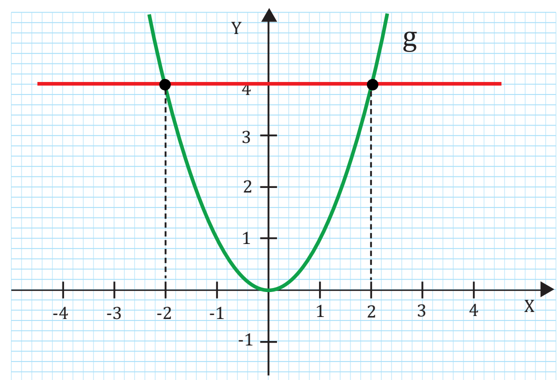
> Una función $f: A \mapsto B$ es **sobreyectiva** si su recorrido coincide con el conjunto de llegada B:
>
> $$R(f) = B$$

Observa en la figura 5 que, si la función es sobreyectiva, cualquier recta horizontal que consideremos corta a la gráfica al menos en un punto.

Así, h es sobreyectiva, mientras que g no lo es.

> Una función es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

$g(x) = x^2$



$h(x) = 2x$

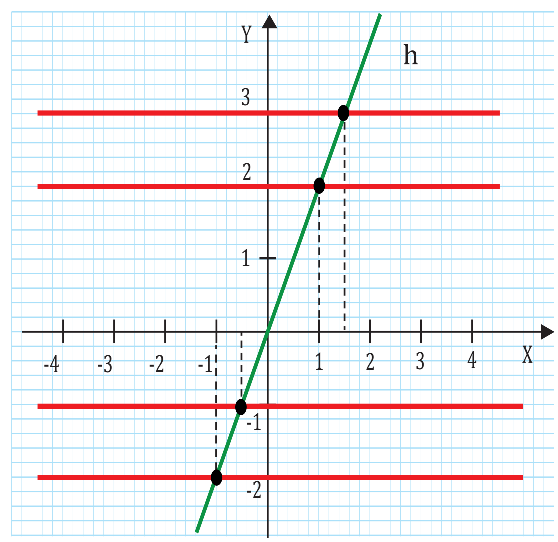


Fig. 5.

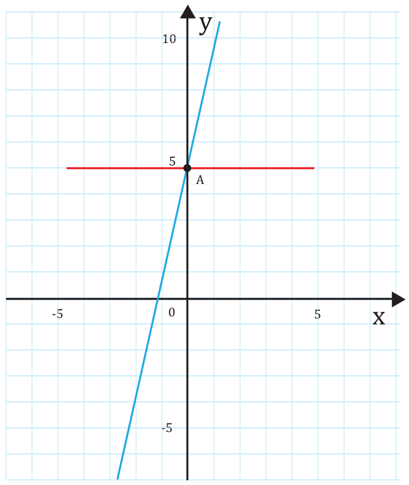


Fig. 6.

x	$f(x) = 4x + 5$	$(x, f(x))$
:	:	:
-1	1	(-1,1)
0	5	(0,5)
1	9	(1,9)
:	:	:

Tabla 1.

- Tabla de valores de la función $y = 4x + 5$

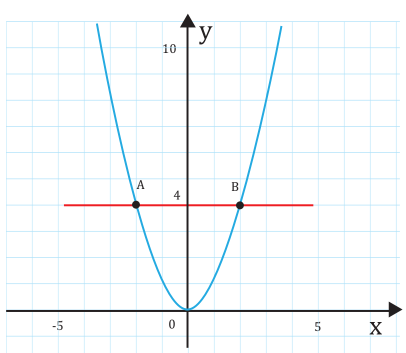


Fig. 7.

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
:	:	:
-2	4	(-2,4)
0	0	(0, 0)
2	4	(2,4)
:	:	:

Tabla 2.

- Tabla de valores de la función $y = x^2$

Análisis de la tabla de valores

Es un conjunto de valores registrados en una tabla, los mismos que determinan la relación entre dos conjuntos o más, pero que, de manera usual para el estudio de las funciones, utilizaremos únicamente tres columnas de datos.

Recordando el principio de inyectividad, tenemos que:

Si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D(f)$

Es decir, al tomar dos valores diferentes de la columna x (conjunto de partida) registrados en la tabla, los valores respectivos que se obtienen según la columna $(y = 4x + 5)$, sus respectivas imágenes deben ser diferentes.

Así entonces podemos determinar si una función es inyectiva de forma numérica.

Según los datos de la tabla para la función $y = 4x + 5$, podemos observar que, al considerar los valores para x, las imágenes obtenidas son diferentes:

$f(-1) = 1$; $f(0) = 5$ y que $f(1) = 6$

Por lo que se verifica que la función correspondiente es inyectiva.

Mientras que al analizar los valores de la función $y = x^2$, observamos que: $f(-2) = 4$; $f(0) = 0$ y que $f(2) = 4$

Las imágenes para $x = -2$ y $x = 2$ son iguales, por lo que se puede concluir que la función $y = x^2$ no es inyectiva.

Actividades

5. Verifica si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico, gráfico y de tabla de valores.

a. $g: x \to g(x) = 5x + \frac{1}{2}$

b. $f: x \to f(x) = -4x^2 + 6$

c. $h: x \to h(x) = \sqrt{x} - 3$

d. $f: x \to f(x) = x^2 + 1$

e. $f: x \to f(x) = 4x - 1$

f. $f: x \to f(x) = 3x - 2$

1.3. Función sobreyectiva

Análisis algebraico

Una función f:A $\mapsto$ B es sobreyectiva si cada elemento de B es imagen de algún elemento del dominio. Es decir, f es sobreyectiva si Rec (f) = B; Rec equivale a recorrido.

Debemos tomar en cuenta además que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$; $x \rightarrow f(x)$, tiene como dominio y codominio los números reales.

Ejemplo 6

Si tenemos la función f : $x \mapsto f(x)=-x+7$, determinamos si es sobreyectiva.

$y = -x + 7$ Función Dato

$x = -y + 7$ Se resuelve para x

Se tiene que el recorrido de f : $x \mapsto f(x) = \mathbb{R}$, por ende, la función es sobreyectiva.

Análisis de la tabla de valores

Revisando las tablas respectivas para las funciones:

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $\quad$ $f : A \mapsto \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x^3$ y $x \mapsto f(x)=\sqrt{x}$

En la primera tabla que aparece, observamos que todos los valores del casillero de las imágenes pertenecen al conjunto de llegada, por lo que se determina que la función es sobreyectiva.

En cambio, en la segunda tabla si se revisan los valores, es posible observar que para los valores negativos de x, las imágenes respectivas no se encuentran definidas.

Por lo tanto, la función f : $x \rightarrow f(x)= \sqrt{x}$ no es sobreyectiva.

Análisis gráfico en diagrama sagital

Una función $f: X \rightarrow Y$ es una función **sobreyectiva** si:

$$\text{Im}(f) = Y$$

Esto significa que todo elemento $y \in Y$ es la imagen de al menos un elemento $x \in A$. Es decir, el recorrido de f coincide con el conjunto de llegada.

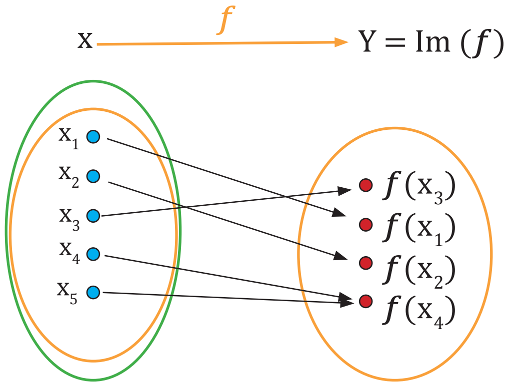


Fig. 8.

x	$f(x) = x^3$	$(x, f(x))$
:	:	:
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	8	(2,8)
:	:	:

Tabla 3.

Tabla de valores de la función $y = x^3$

x	$f(x) = \sqrt{x}$	$(x, f(x))$
:	:	:
-1	no def.	no def.
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	1,4142	(2,1.4)
3	1,732	(3,1.7)
:	:	:

Tabla 4.

Tabla de valores de la función $y = \sqrt{x}$

Análisis Gráfico

Gráficamente, podemos determinar si una función es sobreyectiva cuando al determinar el recorrido de forma gráfica, este debe coincidir con el conjunto de llegada en la función propuesta.

Si consideramos la función: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2 + 2$

Observamos que el conjunto inicial de f es $\mathbb{R}$, además que el conjunto de llegada de f es: $\mathbb{R}$.

En la gráfica de la función f definida por $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 2$, al determinar el recorrido de manera gráfica, tenemos que la imagen de la función f es $[2, \infty)$.

De modo que podemos concluir que el recorrido de la función no coincide con el conjunto final de f; entonces concluiremos que: $f(x) = x^2 + 2$ no es sobreyectiva.

Ahora bien, analizando la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$, podemos concluir rápidamente que la función es sobreyectiva, debido a que el conjunto del recorrido coincide con el conjunto final.

Gráfica de la función

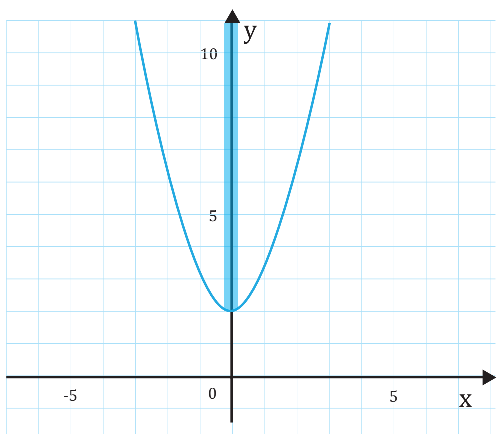


Fig. 9.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto y = x^2 + 2$

Rec $(f) = [2, +\infty[$

f no es sobreyectiva

Gráfica de la función

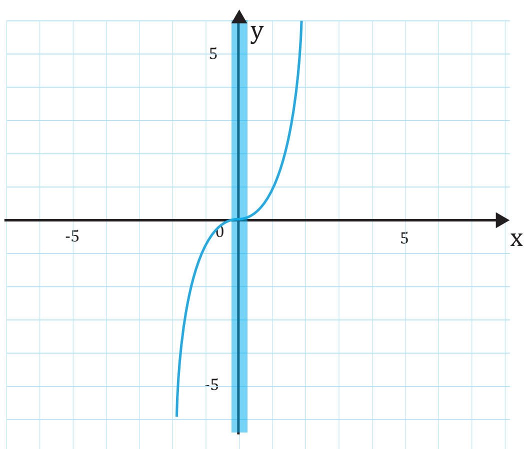


Fig. 10.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto y = x^3$

Rec $(f) = \mathbb{R}$

f si es sobreyectiva

Actividades

6. Analiza la inyectividad y sobreyectividad de las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.

   a. $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 - 2$

   b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x + 4}$

   c. $f: x \mapsto f(x) = -4x + \frac{3}{4}$

1.4. Función biyectiva

Si una función f es sobreyectiva y a la vez inyectiva, entonces es biyectiva.

Ejemplo 7

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2$, determinemos si es biyectiva.

<table>
<tr><th>Análisis algebraico</th><th>Análisis numérico</th><th>Análisis gráfico</th></tr>
<tr>
<td>$3x_1 - 2 = 3x_2 -2$
$3x_1 - 2 + 2 = 3x_2$
$3x_1 = 3x_2$
$\frac{3x_1}{3} = \frac{3x_2}{3}$
$x_1 = x_2$</td>
<td>

x	$f(x) = 3x - 2$
:	:
-1	-5
0	-2
1	1
2	4
:	:

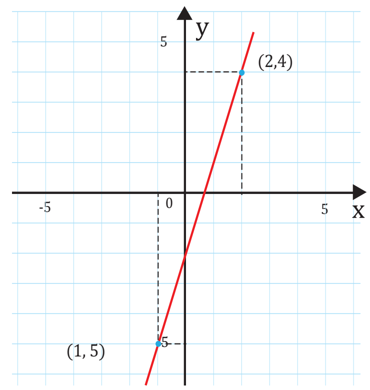
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Por lo tanto f es inyectiva</td>
<td>Las imágenes obtenidas son diferentes, por lo tanto f es inyectiva.</td>
<td>Se observa que el recorrido coincide con el conjunto de salida, además es inyectiva.</td>
</tr>
</table>

Tabla 5

Según el análisis, podemos concluir que la función es biyectiva.

Si una función no es inyectiva, no es necesario analizar su sobreyectividad para determinar si es biyectiva, o también, si no es sobreyectiva tampoco será necesario verificar la inyectividad para determinar su biyectividad.

Una función no biyectiva puede ser inyectiva o sobreyectiva, o bien, ninguna de las dos.

Actividades

7. Dadas las funciones, realiza la representación gráfica y determina si son biyectivas analizando el criterio algebraico, numérico y gráfico.

   a. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
   $x \mapsto f(x) = -5x^2 + 10$

   b. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
   $x \mapsto f(x) = -3x - 4$

   c. $f: A \mapsto \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}$
   $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+5} + 2$

1.5. Operaciones con funciones

En el conjunto de las funciones reales de variable real, podemos definir diversas operaciones.

Adición	Sustracción
La función suma de f y g es la función que asigna a cada número real x la suma de las imágenes por la función f y por la función g: $f + g : x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$	La función diferencia de f y g es la función que asigna a cada número real x la diferencia de las imágenes por la función f y por la función g: $f - g : x \rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	**División**
La función producto de f y g es la función que asigna a cada número real x el producto de las imágenes por la función f y por la función g: $f \cdot g : x \rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	La función cociente de f y g es la función que asigna a cada número real x el cociente de las imágenes por la función f y por la función g: $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ ; g(x) \neq 0$

Tabla 6

Ejemplo 8

Dadas las siguientes funciones: $h: x \mapsto h(x) = -x^2 + 2x + 3$; $g: x \mapsto g(x) = 4x^2 - 5x + 2$. Calculemos: a. $g + h$; b. $(g + h)(2)$; c. $g - h$; d. $(g - h)(-3)$

a. $g + h : x \mapsto (g + h)(x) = g(x) + h(x)$

$= 4x^2 - 5x + 2 + (-x^2 + 2x + 3)$ — Reemplazamos las funciones h y g

$= 3x^2 - 3x + 5$ — Resolvemos los paréntesis y reducimos términos.

$= 3x^2 - 3x + 5$ — Expresión resultante.

b. Ahora es posible hallar el valor numérico de $(g + h)(2)$

$g + h : x \mapsto (g + h)(2) = 3(2)^2 - 3(2) + 5$ — Reemplazamos $x = 2$

$= 12 - 6 + 5$ — Resolvemos la potencia, el producto y la suma

$= 11$ — Encontramos el valor numérico respectivo

c. Mediante un proceso análogo, tendremos:

$g - h : x \mapsto (g - h)(x) = g(x) - h(x)$ — Reemplazamos las funciones h y g

$= 4x^2 - 5x + 2 - (-x^2 + 2x + 3)$ — Reducimos términos.

$= 4x^2 - 5x + 2 + x^2 - 2x - 3$

$= 5x^2 - 7x - 1$

$= 5x^2 - 7x - 1$ — Expresión resultante.

d. Calculamos el valor numérico.

$g - h : x \mapsto (g - h)(-3) = 5(-3)^2 - 7(-3) - 1$ — Reemplazamos $x = -3$

$= 65$ — Resolvemos la potencia, el producto y la suma

Encontramos el valor numérico respectivo

Ejemplo 9

Dadas las siguientes funciones: $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - x}$; $g: x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$ Calcular:

a. $f \cdot g : x \mapsto f\ (f \cdot g)\ (x)$; b. $f \cdot g : x \mapsto (f \cdot g)\ (4)$; c. $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$; d. $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(2)$

a. $f \cdot g : x \mapsto (f \cdot g)\ (x)$

$= (\sqrt{x^2 - x}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)$ Reemplazamos las funciones f y g

$= \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{4}$ Expresión resultante

b. Valor numérico de $(f \cdot g)\ (4)$

$= \left(\frac{\sqrt{4^3 - 4^2}}{4}\right)$ Reemplazamos x = 4

$= \left(\frac{\sqrt{64 - 16}}{4}\right)$ Resolvemos las potencias.

$= \left(\frac{\sqrt{48}}{4}\right)$ Resolvemos la diferencia.

$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right)$ Simplificamos el radical

$= \sqrt{3}$ Simplificando la fracción

c. $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$= \frac{\sqrt{x^2 - x}}{\frac{\sqrt{x}}{4}}$ Reemplazamos las funciones f y g

Realizamos el producto de medios y extremos

$= \frac{4\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x}}$ Simplificamos la expresión

$= 4\sqrt{x - 1}$

d. Calculamos el valor numérico.

$\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(2) = 4\sqrt{(2) - 1}$ Reemplazamos las funciones f y g

$= 4\sqrt{1}$ Resolvemos la potencia y la diferencia

$= 4$

Actividades

8. Dadas las siguientes funciones: $h: x \mapsto h(x) = -\sqrt{x}$; $g: x \mapsto g(x) = 4x^2 + \frac{1}{2}$; $f: x \mapsto f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}$ suponiendo que $f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0$. Calcula.

a. $h + g$
b. $h - g$
c. $h + 2g$
d. $f + g + h$
e. $h + 2g$
f. $g + f$
g. $\frac{h}{f}$
h. $\frac{h \cdot g}{f}$
i. $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2)$
j. $\left(\frac{h}{g} + h\right)(4)$

Dominio resultante de las operaciones con funciones

Cuando se combinan las funciones a través de las operaciones indicadas anteriormente, se producen nuevas funciones cuyo dominio también es diferente para el inicial en cada uno de las funciones, debido que al combinarse una función con otra, el dominio resultante será la intersección de los dominios de las funciones que intervienen en la operación.

Así entonces, según la tabla:

Operación		Dominio
Adición	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$\text{Dom}(f+g)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)$
Diferencia	$(f-g)(x)=f(x)+g(x)$	$\text{Dom}(f-g)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)$
Producto	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	$\text{Dom}(f\cdot g)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)$
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)-\{x\in\mathbb{R}/g(x)=0\}$

Tabla 7

1. Dadas las funciones: $f: x\mapsto f(x)=\sqrt{(x-2)}$; $g: x\mapsto g(x)=\frac{1}{x+3}$

Dominio de f

Sea $f(x)=\sqrt{x-2}$

Por la propiedad de los radicales tenemos:

$x-2\geq 0$ por lo que $x\geq 2$

Entonces :

Dom $(f)=[2;\infty)$

Determinamos el dominio de g

Sea $g(x)=\frac{1}{x+3}$

Por la propiedad de las fracciones tenemos:

$x+3\neq 0$ por lo que $x\neq -3$

Entonces :

$\text{Dom}(g)=(-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$

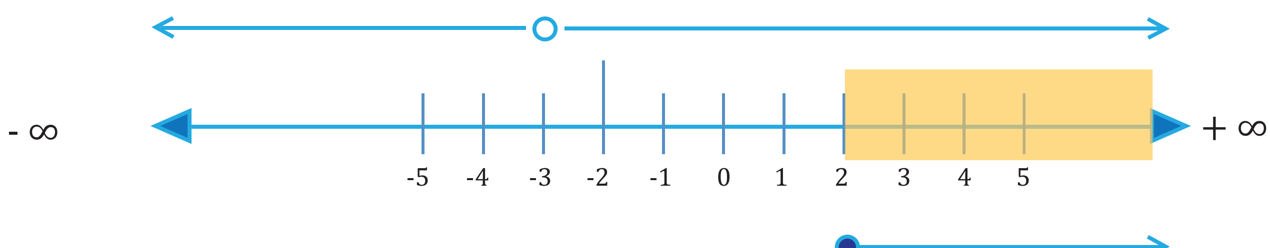


Fig. 11.

$\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)=[2;\infty)$

Composición de funciones

Podemos definir otra operación, diferente a las anteriores, llamada composición de funciones.

Considera las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$, y un número real, por ejemplo, $x = 2$. Podemos calcular la imagen de 2 en f, con lo que obtenemos $f(2) = 5$, y a continuación, hallar la imagen de 5 en g, es decir, $g(5) = g(f(2)) = 24$.

$$\text{Sea:} \quad x = 2 \rightarrow f(2) = 5 \rightarrow g(f(2)) = 24$$

En general, dadas dos funciones f y g, la función que asigna a cada x el valor $g(f(x))$ se denomina **función compuesta** de f y g, y se escribe $g \circ f$.

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x)) \quad (\text{flecha } g \circ f \text{ de } x \text{ a } g(f(x))) \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para resolver ejercicios de composición de funciones se debe considerar que si se escribe $(f \circ g)(x)$, la función g ingresa a la función f, es decir, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ejemplo 10

1. Dadas las funciones:

$f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = \frac{x}{4}$.

Calculamos a. $(f \circ g)(x)$ y ;b. $(f \circ g)(x)$

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$	b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= \left(\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2}\right)$ $= \left\lvert \frac{x}{4} \right\rvert$	$= \frac{\sqrt{x^2}}{4}$
La función g "ingresa" a f.	La función f "ingresa" a g.

Tabla 8

Concluimos que la función compuesta no cumple con la **propiedad conmutativa**; $f \circ g \neq g \circ f$.

Y TAMBIÉN: ¿?

- La función compuesta de f y g se escribe invirtiendo el orden, $g \circ f$, para que coincida con el de la expresión $g(f(x))$.
- La notación $g \circ f$ se lee g compuesta con f

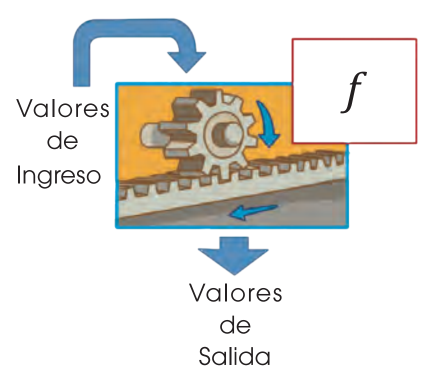


Fig. 12.

1.6. Función Inversa

Qué sucedería si consideramos a una función como un mecanismo, en el cual se tienen «valores de ingreso» (datos), los mismos que luego de cierto proceso, generan otro tipo de valores «elementos de salida».

Algo semejante a la computadora, donde ingresamos información a través de un dispositivo de ingreso (teclado) y obtenemos a través de un dispositivo de salida (pantalla, impresora) el «resultado de esa interacción».

Para ampliar nuestra concepción, en la figura *funcionamiento* se observa el proceso de operación, pero y ¿si «revirtiéramos la operación»? Entonces los valores de entrada se convertirían en los valores de salida.

En las tablas de las funciones, observamos que los elementos del conjunto de entrada de la función $y = 3x + 1$ coinciden con los elementos de salida de la tabla para la función $y = \frac{x - 1}{3}$

Funcionamiento

x	$f(x) = 3x + 1$
:	:
-2	-5
-1	-2
0	1
1	4
:	:

Tabla 9

Tabla para la función

$y = 3x + 1$

x	$f(x) = \frac{x - 1}{3}$
:	:
-5	-2
-2	-1
1	0
4	1
:	:

Tabla 10

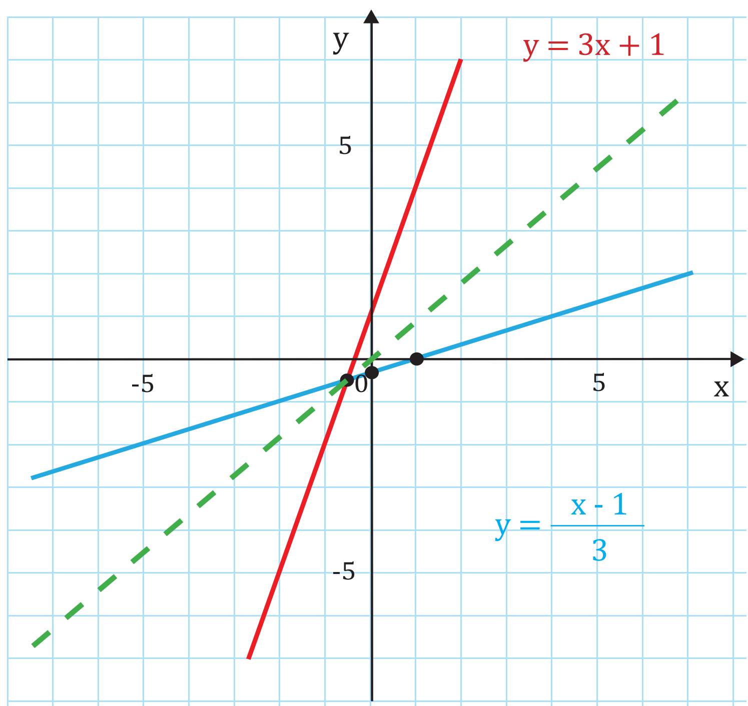


Fig. 13.

Como podemos observar, las gráficas de las funciones $f: x \mapsto f(x) = 3x + 1$ y $f: x \mapsto f(x) = \frac{x - 1}{3}$, resultan líneas simétricas, respecto al origen.

Con las ideas antes propuestas definiremos una función inversa:

Sea f una función biyectiva con dominio X y recorrido Y, se define su función inversa, la cual se denota como f^{-1}, con dominio Y y recorrido X, de la siguiente manera:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Propiedades:

- La función $f^{-1}(x)$ es biyectiva, por ende, será inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Los elementos del dominio de la función f coinciden con los elementos del recorrido de la función inversa y viceversa.
- Al realizar las representaciones gráficas, resultan curvas que forman una figura simétrica.
- No todas la funciones tienen inversa.

Cálculo de la función inversa (algebraicamente)

Ejemplo 11

Encontramos $f^{-1}(x)$ si $f : x \mapsto f(x) = \frac{3x+5}{2}$

$y = \frac{3x+5}{2}$

$x = \frac{3y+5}{2}$ Intercambiamos las variables y en vez de x.

$2x = 3y + 5$ Multiplicamos por 2

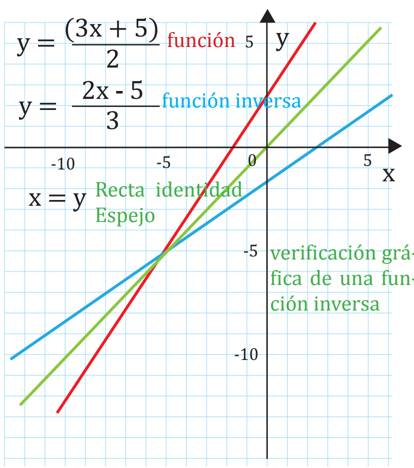
$\frac{2x-5}{3} = y$ Transponemos 5 y dividimos para 3.

$y = \frac{2x-5}{3}$ Axioma reflexivo.

Finalmente, y se reemplaza por $f^{-1}(x)$ resulta entonces:

$f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3}$

Verificación Gráfica



Método del espejo. No es necesaria ninguna fórmula, consiste en colocar imaginariamente «un espejo» en la recta identidad, las funciones $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ deben ser simétricas.

Se verifica entonces que:

$f(x) = \frac{3x+5}{2}$ y $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$ son inversas

Actividades

9. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a. $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 1$

b. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x+1}{2}$

c. $h : x \mapsto h(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Verificación algebraica de la función inversa

Para verificar que una función sea inversa, utilizamos el concepto de composición de funciones.

Una función f es uno a uno con su respectiva función g si y solo si:

- $f(g(x))=x$ para todo x en el dominio de g
- además $g(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f

Ejemplo 12

Calculemos la función inversa de $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $x \neq 2$

- Despejamos la variable x:

$$xy - 2y = x + 1 \Rightarrow xy - x = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

- Sustituimos y por x, y viceversa: $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Así pues: $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; $x \neq 1$

Comprobamos que la función hallada es la inversa de la original:

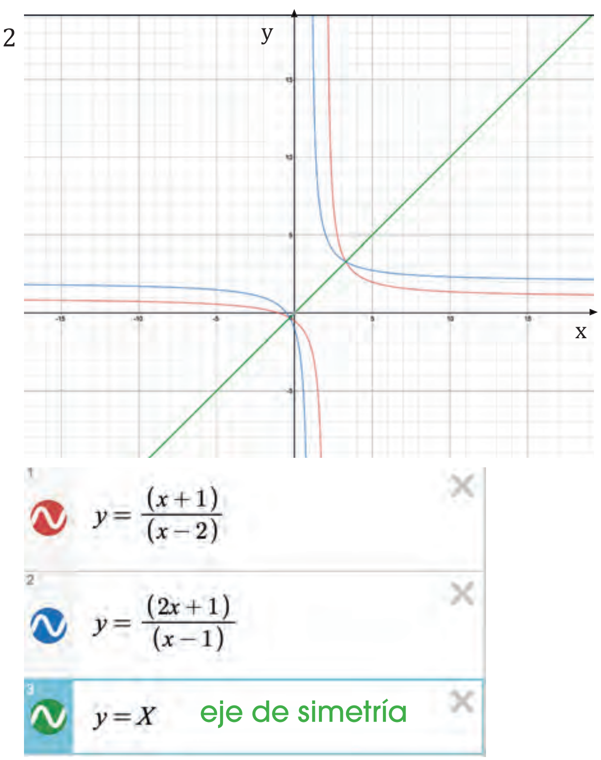
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) =$$

$$= \frac{2\frac{x+1}{x-2} + 1}{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} - 2} = \frac{3x}{3} = x$$

En efecto: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$



Ejemplo 13

Demostremos algebraicamente que las funciones:

$f : x \mapsto f(x) = x^3 + 1$ y $g : x \mapsto g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ son inversas.

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$	b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$(f \circ g)(x) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1$	$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1}$
$(f \circ g)(x) = x - 1 + 1$	$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x^3}$
$(f \circ g)(x) = x$	$(g \circ f)(x) = x$

Tabla 11

Actividades

10. Determina la inversa de las funciones.

a. $f : x \mapsto f(x) = 5x + 4$

b. $f : x \mapsto f(x) = 2x - 1$

c. $f : x \mapsto f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$

11. Determina $f^{-1}(x)$ para las funciones, verifica tus resultados con el método algebraico y gráfico.

a. $f : x \mapsto f(x) = 3x^3 + 1$

b. $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x-2}$

Introducción

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales: {1, 2, 3 ...}.

Sucesión de Fibonacci

La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

en la que cada término, excepto los dos primeros, se halla sumando los dos términos inmediatamente anteriores se encuentra en numerosos elementos de la naturaleza.

Así, la disposición de las hojas alrededor del tallo en algunas plantas o la colocación de las semillas en la flor del girasol se produce según los términos de esta sucesión.

Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci, por ser este matemático italiano el primero en describirla.



http://goo.gl/csE99R

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una progresión aritmética (o por diferencia) es una sucesión de términos de tal manera que, para obtener el siguiente término a partir del anterior, aumentamos un mismo número que puede ser positivo o negativo, al que se llama diferencia (d).

Término n - simo

Es el último término considerado en una progresión. La expresión que permite calcularlo es:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

Una progresión aritmética se determina totalmente si se conocen los componentes de la progresión, como son: primer término (a_1), diferencia (d) y el número de términos (n).

Así, en el ejemplo tenemos:

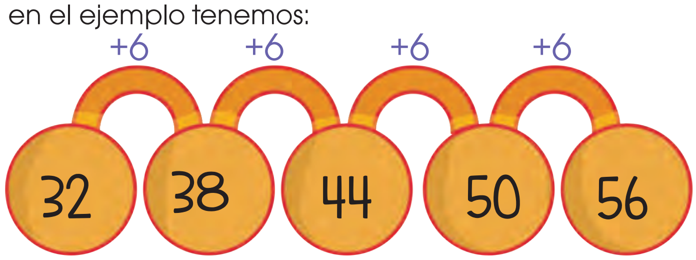


Fig. 14.

Primer término: $(a_1) = 32$

Diferencia: $(d) = 6$

Último término: $(a_n) = 56$

Número de términos: $(n) = 5$

Y TAMBIÉN: ¿?

Ley de Titius-Bode

Es una sucesión con la cual se predijo en 1766 la existencia de un cuerpo celeste entre la orbita de Marte y Júpiter; ahora conocido como Ceres.

https://goo.gl/ec9dHg

Ejemplo 14

Progresión	n	a_1	d	a_n
...1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,...	7	1	2	13
...-100, -200, -300,...	3	-100	-100	-300
$\ldots -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \ldots$	5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
...x + 1, 3x + 5, 5x + 9,...	3	x + 1	2x + 4	5x + 9

Tabla 12

Las progresiones aritméticas pueden ser crecientes o decrecientes, dependiendo de la constante (diferencia) con la que se realice la progresión.

TIC



En el siguiente portal web podrás encontrar algunos ejemplos de como se aplican las progresiones aritméticas en la vida diaria.

Visita:

http://goo.gl/HpC7Vy

Término general de una progresión aritmética

La fórmula del término general de una progresión aritmética (a_0) se encuentra sin más que observar que:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

Nótese que en todos los casos, el término correspondiente es la suma de dos cantidades:

- La primera es siempre a_1
- La segunda es el producto $(n - 1)\, d$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

Y TAMBIÉN: ¿?

¿Cómo hallar la diferencia?

Se encuentra la diferencia entre el término consecuente y antecedente.

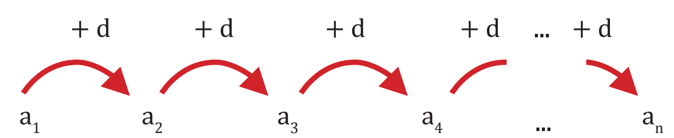


http://goo.gl/0ag7JT

Intuitivamente al pensar en una progresión, a la vista salta la idea de que es una serie de «cosas» que son ordenadas de forma ascendente o descendente y que tienen cierta característica o características en común.

Ejemplo 15

Todos los términos de una progresión aritmética pueden obtenerse a partir del primer término y de la diferencia.



Ejemplo 16

1. Determinemos el 25.° término de $0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \ldots$

Primera idea: Calculamos la diferencia de la progresión.

$d = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

Segunda idea: El 25.° término coincide con el último término, por lo tanto $n = 25$.
Por lo que tendremos:

$a_1 = 0;\ d = \frac{1}{3}\ ;\ n = 25\ ;\ a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$

$a_n = 0 + (25 - 1)\ \frac{1}{3}$

$a_n = 24\ \frac{1}{3}$

$a_n = 8$

2. Determinemos el 35.° término de los múltiplos de 3.

Primera idea: Calculamos la diferencia de la progresión.
Al ser múltiplo de 3, la diferencia será 3.

Segunda idea: El 35.° término coincide con el último término, por lo tanto $n = 35$.
Por lo que tendremos:

$a_1 = 3\ ; d = 3;\ n = 35\ ;\ a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$

$a_n = 3 + (35 - 1)\, 3$ Reemplazamos los datos.

$a_n = 3 + (34)\, 3$ Resolvemos la diferencia.

$a_n = 3 + 112$ Resolvemos el producto.

$a_n = 115$ Resolvemos la suma.

Suma de los términos de una progresión aritmética

En varios ejercicios numéricos de progresiones, es posible determinar la suma de los términos de manera directa, por ejemplo en la progresión:

,... 4, 6, 8, 10

La suma de los términos será: 28

Pero existirán algunas progresiones cuyo número de términos sea mucho mayor, por ello, para calcular la suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética, podemos calcular mediante las expresiones:

$Sn = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
Esta expresión se utilizará cuando en los datos se disponga del número de términos (n), del primer término (a_1) y del último término (a_n).

Tabla 13

$Sn = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)\,d]$
En cambio, en esta expresión se debe disponer del número de términos (n), del primer término (a_1) y de la diferencia de la progresión (d).

Tabla 14

Y TAMBIÉN: ¿?

Según la tradición, el problema de hallar el valor de la suma de los cien primeros números naturales fue planteado en 1787 por un profesor a su clase de niños de diez años, para mantenerlos ocupados un buen rato. En esa clase se encontraba el que fue llamdo «príncipe de las matemáticas», el alemán Carl F. Gauss.

Gauss observó que si sumaba el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y, así sucesivamente, obtenía siempre el mismo resultado.

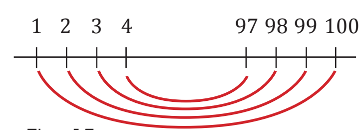


Fig. 15.

$1 + 100 = 101$

$2 + 99 = 101$

$3 + 98 = 101$

...

Así, dedujo que la suma de los cien primeros números naturales es:

$101 \cdot 50 = 5050$

Actividades

12. Determina el n – término, según corresponda.
    a. 9no término de 7, 10, 13, ...
    b. 25vo término de -6, -3, 0,...
    c. 11vo término de $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, ...$
    d. 29vo término de -1, -4, -7, ...

13. En cada una de las progresiones siguientes, halla la suma del número de términos que se indica
    a. 3, 6, 9 , ... $(n = 11)$
    b. 6, 4, 6 , 3, 2, ... $(n = 15)$
    c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ...$ $(n = 21)$
    d. $x - y, x, x + y,$ $(n = 6)$

14. Determina el n – término, según corresponda
    a. 7.º término de 7, 10, 13, ...
    b. 15.º término de -6, -3, 0, ...
    c. 21.º término de $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, ...$
    d. Una progresión aritmética comienza por 2, termina por 3 y su diferencia es 1/10. ¿Cuántos términos hay en la progresión?

15. En cada una de las progresiones siguientes halla la suma del número de términos que se indica
    a. $x, x + y, x + 2y$ $(n = 6)$
    b. 4, 8, 12, ... $(n = 10)$
    c. 8, 4, 0, ... $(n = 15)$
    d. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ $(n = 15)$

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Considera la sucesión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

Si calculamos el cociente entre cada uno de los términos y su anterior, excepto el primero, obtenemos siempre el mismo resultado:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = ... = 2$$

Diremos que esta sucesión es una progresión geométrica de *razón* 2.

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que el cociente entre un término cualquiera, excepto el primero, y su anterior es una cantidad constante. Esta cantidad constante se llama **razón** de la progresión y se representa por *r*.

Y TAMBIÉN: ¿?

En una progresión geométrica se cumple que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por la razón de la progresión.

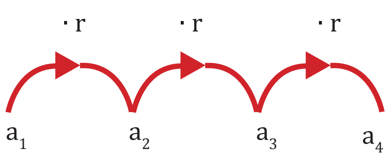


Fig. 16.

Para determinar la razón en una progresión geométrica dada, se utiliza el cociente , debido a que es el proceso inverso del producto, entre el término consecuente y precedente.

3.1. Término general de una progresión geométrica

En una progresión geométrica podemos obtener todos los términos a partir del primer término y de la razón. Observa:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot r = (a_1 \cdot r^3) \cdot r = a_1 \cdot r^4$$

Cada término de la progresión se obtiene multiplicando el primer término por la razón elevada al número que indica el lugar que ocupa dicho término, disminuido en una unidad.

Por tanto, la expresión de un término cualquiera a_n es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo 17

1. ¿Cuál es la razón de la progresión? $3, 1, \frac{1}{3}, ...$

Construimos dos términos adicionales

Determinamos la razón entre 1 y 3. $r = \frac{1}{3}$

Multiplicamos por el último término en la progresión y determinamos el cuarto término. $\frac{1}{9}$. Luego el quinto término. $\frac{1}{27}$

Resulta entonces:

$3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$

2. En la progresión geométrica:

$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$ Determinemos la razón y el quinto término.

$r = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}}$ Determinamos la razón entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{2}$

Resulta $r = \frac{1}{2}$, por lo que el quinto término se obtiene al multiplicar $\frac{5}{8}$ por $\frac{1}{2}$.

Entonces a_5 es $\frac{5}{16}$

Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón, debido a que para obtener los siguientes términos, basta multiplicar el último término registrado, y para obtener los anteriores debemos dividir según lo explicamos en la sección anterior.

Supongamos que tenemos una progresión cuyo primer término sea 3 y su razón respectiva sea 2. Entonces ¿Cómo hallaríamos el término a_{25}?

Ilustrando la situación tenemos:

razón = 2

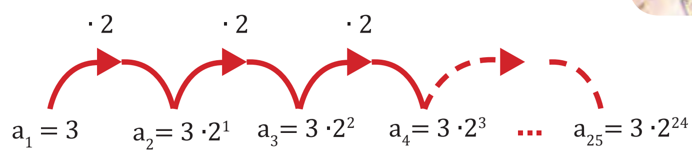


Fig. 17.



http://goo.gl/69Mxrx

- Euclides. Precursor de las proporciones continuas

Para pasar del primer término (a_1) hasta (a_{25}), son necesarios 24 términos.

Para ir encontrando los siguientes términos, se deberá ir multiplicando por 2; aquello supone que tendremos entonces 2^{24}, debido a que es necesario obtener los 24 términos que ya mencionamos. Así entonces, podemos escribir:

$$a_{25} = 3 * 2^{24}, \quad a_{25} = 3 * 16777217 = 50\ 331\ 648.$$

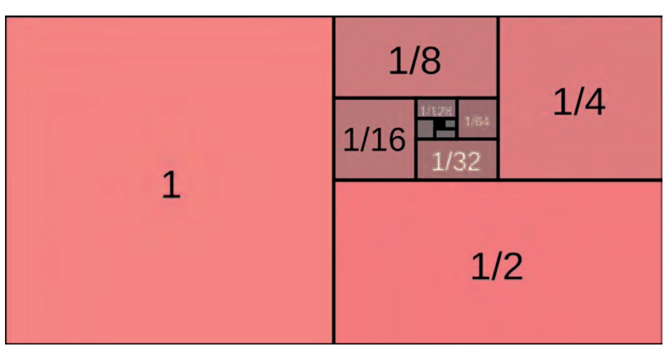
Actividades

16. Halla la expresión del término general y el valor del término a_{20} de la siguiente sucesión.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, ... en caso de que sea una progresión geométrica.

17. Escribe los diez primeros términos de una progresión geométricade razón $r = \frac{1}{3}$ y $a_5 = 2$.

https://goo.gl/kIYFWe



- Ejemplo de progresión geométrica.

3.2 Suma de los n términos de una progresión geométrica

A continuación, deduciremos una expresión que nos permitirá obtener la suma de n términos de una progresión geométrica sin necesidad de calcularlos.

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n, ...$ una progresión geométrica y representemos por Sn la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$$

- Multiplicamos por r dicha expresión

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + r \cdot a_4 + ... + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$
$$= a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot r$$

- Calculamos $r \cdot S_n - S_n$:

$$\begin{array}{rl} & r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot r \\ - & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n \\ \hline & r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1 \end{array}$$

- Sacamos factor común S_n y despejamos:

$$Sn\,(r - 1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Puesto que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, Sn puede expresarse también como:

$$S_n = \frac{(a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

Por tanto, para sumar cualquier número de términos de una progresión geométrica, nos es suficiente con conocer a_1 y r.

Y TAMBIÉN: ¿?

Cuenta la leyenda que un poderoso rey tuvo un maestro de ajedrez al que estaba muy agradecido por haberle iniciado en este juego.
El rey ofreció al maestro una recompensa, y éste pidió todo el trigo que se pudiera reunir colocando un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así sucesivamente hasta la casilla sesenta y cuatro del tablero de ajedrez.
El rey aceptó gustoso, pues pensaba que con un saco de trigo recompensaría al maestro.
Pero su gran sorpresa fue que, al contar los granos de trigo necesarios, se dio cuenta de que no había suficiente trigo en el país para recompensar al maestro. ¿Cómo era posible?

- Calcula las toneladas de trigo necesarias para recompensar al maestro, si consideramos que un grano de trigo pesa aproximadamente $0{,}0496$ g.

Ejemplo 18

Hallemos la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 3$ y $a_1 = 1$.

Aplicamos la fórmula $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = S_6 = 364$$

Actividades

18. Calcula, la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya razón es $r = 2$.

19. De una progresión geométrica se conoce $a_4 = 128$ y $r = 4$. Calcula la suma de los ocho primeros términos.

20. De una progresión geométrica se sabe que la suma de sus diez primeros términos es $S_{10} = 29524$ y su razón, $r = 3$. Halla el primer término.

21. De una progresión geométrica se conoce $r = 2$ y $a_8 = 768$. Halla la suma de los diez primeros términos.

Suma ilimitada de una progresión geométrica decreciente

Observemos la figura 18.

Consideramos un segmento AB de longitud 1 m y lo dividimos por la mitad. A su vez, el segmento CB de longitud $\frac{1}{2}$ m lo dividimos por la mitad, y así de forma sucesiva. Obtenemos de esta forma una sucesión de segmentos de longitudes:

$$\frac{1}{2}\text{ m}, \frac{1}{4}\text{ m}, \frac{1}{8}\text{ m}, \frac{1}{16}\text{m}, ...$$

Esta sucesión es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ con infinitos términos y en la que el valor absoluto de cada término es menor que el del anterior. Decimos que se trata de una progresión geométrica decreciente ilimitada.

Si pretendiésemos calcular la suma de todos los términos de esta progresión, no acabaríamos nunca. Sin embargo, esta suma sí existe: es la longitud del segmento del cual hemos partido, 1 m.

La existencia de esta suma se debe a que, para valores muy grandes de n, los términos de la sucesión son prácticamente nulos.

Así, para valores de n muy grandes se tiene:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

Por tanto, la suma de las longitudes de los segmentos es:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

En general, dada una progresión geométrica ilimitada decreciente de razón r y primer término a_1, la suma de todos sus términos, que representamos por S_∞, viene dada por la expresión:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

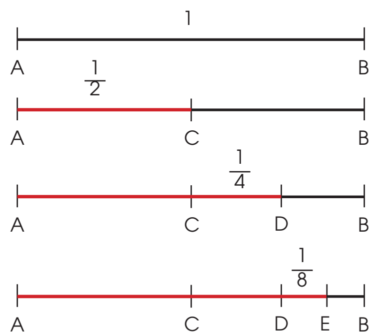


Fig. 18.

Y TAMBIÉN:

La condición para que una progresión geométrica sea decreciente es:

$$1 < r < 0$$

En caso de que

$$-1 < r < 0$$

la progresión no es decreciente puesto que el signo de sus términos se va alternando (sucesión oscilante).

A estas progresiones también se puede aplicar la expresión de la suma ilimitada de sus términos.

Ejemplo 19

Comprobemos que la progresión $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, ...$ es geométrica decreciente y calculemos la suma de todos sus términos.

Comprobamos que el cociente entre dos términos consecutivos es constante:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : 1 = \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = ... = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego, es una progresión geométrica de razón

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Puesto que la razón es menor que 1, se trata de una progresión geométrica decreciente.

Así pues, la suma de sus términos es:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 3.4142...$$

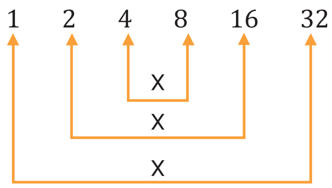


Fig. 19.

Y TAMBIÉN: ¿?

Podemos obtener cualquier término de una progresión geométrica, excepto el primero, a partir de su término anterior multiplicando por la razón.

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Asimismo, podemos obtener cualquier término de una progresión geométrica a partir de su término posterior dividiendo por la razón.

$$a_n = \frac{a_n + 1}{r}$$

3.3. Producto de los n términos de una progresión geométrica

Considera la progresión geométrica $1, 2, 4, 8, 16, 32$.

Si calculamos los productos indicados en el esquema del margen, verás que siempre se obtiene el mismo resultado.

En general, dados n términos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n$ de una progresión geométrica, se cumple que al multiplicar el primer término por el último, el segundo por el penúltimo, el tercero por el antepenúltimo, etc., se obtiene siempre el mismo resultado.

$$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot r \cdot \frac{a_n}{r} = a_1 \cdot a_n$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = a_1 \cdot r^2 \cdot \frac{a_n}{r^2} = a_1 \cdot a_n; ...$$

Podemos enunciar esta propiedad de la siguiente manera:

> El **producto de dos términos** de una progresión geométrica **equidistantes de los extremos** es un valor constante e **igual al producto de dichos extremos**.

Esta propiedad nos permite calcular el producto de n términos de una progresión geométrica.

Designemos por P_n dicho producto y escribamos P_n de dos formas diferentes, como se indica a continuación:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot ... a_4 \cdot a_3 \cdot \; a_2 \cdot a_1$$

Si multiplicamos término a término ambas igualdades y agrupamos los factores de dos en dos, obtenemos:

$$P_n \cdot P_n = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot ... \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Por la propiedad que acabamos de ver, todos estos paréntesis tienen el mismo valor, $a_1 \cdot a_n$. Puesto que hay n paréntesis, podemos expresar el producto anterior como:

$$P_n^{\,2} = (a_1 - a_n)^n \Rightarrow P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Ejemplo 20

Calculemos el producto de los diez primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 4$ y que $a_{10} = 2048$.

Sustituimos los valores de a_1 y a_{10} en la expresión del producto P_n:

$$P_n = \; (a_1 \cdot a_n)^n \Rightarrow P_n = \sqrt{(4 \cdot 2048)^{10}} = 3{,}7 \cdot 10^{19}$$

Ejemplo 21

Calculemos el producto de los ocho primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 4$ y que $r = 3$.

Calculamos primero a_8 y, a continuación, sustituimos los valores de a_1 y a_8 en la expresión de P_n:

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 \Rightarrow a_8 = 4 \cdot 3^7 = 8748$$

$$Pn = (a_1 \cdot a_n)^n \Rightarrow Pn = \sqrt{(4 \cdot 8748)^8} = 1{,}5 \cdot 10^{18}$$

4. INTERMEDIARIOS FINANCIEROS

En la sociedad actual, muchas personas, a pesar de disponer de ahorros, recurren a los préstamos para comprar bienes o invertir en negocios.

En economía, se distingue entre ofertantes de fondos y demandantes de fondos.

- Los **ofertantes de fondos** son las personas o entidades que disponen de dinero y pueden prestarlo a otras personas o entidades.
- Los **demandantes de fondos** son las personas o entidades que necesitan dinero por cualquier motivo.

Las entidades financieras actúan de **intermediarios** entre los demandantes y los ofertantes de fondos.

4.1. Interés

Los demandantes de dinero pagan una cantidad, llamada interés, a quienes se la ofrecen, por medio de los intermediarios. La cantidad que se paga por cada dólar se llama tipo de interés.

Los tipos de interés que cobran estos intermediarios por prestar dinero (préstamos y créditos) son más elevados que los que pagan a los ofertantes (depósitos); con la diferencia, cubren los gastos derivados de sus negocios y obtienen beneficios.

Veamos a continuación las modalidades más frecuentes de interés.

Interés simple

Un capital está sujeto a un régimen de interés simple cuando, al finalizar el período mínimo de depósito, los intereses son retirados.

En tal caso, el capital permanece inalterable.

En general, si representamos el interés que obtenemos por I, el capital por C, el tipo de interés anual expresado en tanto por uno por i, y el tiempo en años por n, tenemos:

$$I = C \cdot i \cdot n$$

El año comercial

Para simplificar los cálculos comerciales se estableció el año comercial de 360 días, formado por doce meses de 30 días cada uno.

Y TAMBIÉN: ¿?

Capital: Cantidad de dinero prestada por una entidad financiera o depositada en una entidad financiera.

Y TAMBIÉN: ¿?

A partir de la fórmula del interés simple, podemos obtener las de las otras variables:

$$C = \frac{I}{i \cdot n}$$

$$i = \frac{I}{C \cdot n}$$

$$n = \frac{I}{C \cdot i}$$

Ejemplo 22

María deposita \$ 2 000 en la caja de ahorros de su localidad, que le ofrece el 6% de interés simple anual. Calculemos el beneficio una vez transcurridos 90 días.

- En primer lugar, expresamos los datos:

$C = \$\,2\,000 \qquad n = 90 \text{ días} \qquad i = 6\,\% = 0{,}06$

- Para determinar el beneficio al cabo de 90 días, aplicamos la fórmula del interés simple. Previamente, expresaremos el tiempo en años:

$$n = 90 \text{ días} \cdot \frac{1 \text{ año}}{360 \text{ días}} = 0{,}25 \text{ año}$$

$$I = 2\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}25 = 30 \text{ dólares}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

A partir de la fórmula del interés compuesto, podemos obtener otras:

$$C = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} - 1$$



http://goo.gl/vLTCQB

Luca Pacioli
Matemático italiano (1445-1514).
El hecho de estar en contacto con artesanos y mercaderes desde pequeño, le permitió aprender las denominadas matemáticas comerciales, que consistían básicamente en manejar el sistema de numeración hindo-arábigo.
En 1475, fue profesor en la Universidad de Perusa, y ya en 1494, cuando escribió su *Tratado de las cuentas y las escrituras*, era considerado uno de los mejores maestros en contabilidad de toda Italia, y fue contratado por el duque de Florencia para trabajar como tesorero en la corte.

http://goo.gl/8uH8f0

Interés compuesto

Un capital está sujeto a un régimen de interés compuesto cuando, al finalizar el período mínimo del depósito, los intereses no se retiran y se añaden al capital para producir nuevos intereses.

En general, el capital final, C_n, que se obtiene al depositar, en un régimen de interés compuesto, un cierto capital, C, a un tipo de interés, i, (expresado en tanto por uno) durante n años es:

$$Cn = C \cdot (1 + i)^n$$

Para determinar el interés, I, obtenido, tenemos que restar al capital final, C_n, el capital inicial, C. Así:

$$I = Cn - C = C \cdot (1 + i)^n - C \Rightarrow I = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Ejemplo 23

Calculemos qué capital obtendremos al cabo de tres años por un depósito de \$ 35 000 sometido a un interés anual del 8%, si no retiramos los intereses.
Haz los cálculos:

a. Utilizando la fórmula del interés simple.
b. Utilizando la fórmula del interés compuesto.
- Compara los dos procedimientos.

En primer lugar, expresamos los datos:
$C = \$\,35\,000$ $n = 3$ años $i = 8\% = 0{,}08$ (tanto por uno)

a. Utilizamos la fórmula del interés simple:

- Para calcular los intereses del primer año, I_1, aplicamos la fórmula del interés simple al capital inicial, C.
- Como no retiramos los intereses, el capital depositado al final del primer año, C_1, es la suma del capital inicial, C, y los intereses producidos, I_1.
- Los intereses del segundo año, I_2, se calcularán a partir del capital que ahora hay depositado, o sea, C_1.
- Para encontrar I_3 procederemos como en el segundo año, considerando ahora como capital inicial el capital al final del segundo año,

$$C_2 = C_1 + I_2.$$

t	Capital inicial	Intereses	Capital final
1	C	$I_1 = C \cdot i = 35000 \cdot 0{,}08 = 2800$	$C_1 = C + I_1 = 35000 + 2800 = \$\,37800$
2	C_1	$I_2 = C_1 \cdot i = 37800 \cdot 0{,}08 = 3024$	$C_2 = C_1 + I_2 = 37800 + 3024 = \$\,40824$
3	C_2	$I_3 = C_2 \cdot i = 40824 \cdot 0{,}08 = 3265{,}92$	$C_3 = C_2 + I_3 = 40824 + 3265{,}92 = \$\,440\,89{,}92$

Tabla 15

- Vemos que al cabo de los tres años el capital C_3 es \$ 44089,92.

b. Utilizamos la fórmula del interés compuesto:

$$C_3 = 35000 \cdot \times (1 + 0{,}08)^3 = \$\,44089{,}92 \cdot$$

- Tal y como puedes comprobar, hemos obtenido el mismo resultado, aunque el procedimiento aplicado en el apartado a. es mucho más largo.

Ejemplo 24

Alberto ha obtenido un capital final de $\$5\,408$ por un depósito que efectuó hace dos años. Sabiendo que su banco le ofrece el 4% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad inicial ingresó?

- En primer lugar, expresamos los datos:

  $C_n = \$\,5\,408 \quad n = 2 \text{ años} \quad i = 4\% = 0{,}04$ (tanto por uno)

- Para calcular el capital inicialmente depositado, despejamos C en la fórmula del interés compuesto y sustituimos los datos.

$$C = \frac{C_n}{(1+i)^n} \Rightarrow C = \frac{5408}{(1+0{,}04)^2} \Rightarrow C = \$\,5000$$

Ejemplo 25

Calcula el capital final que obtendrá Ana al cabo de dos años por un depósito de $\$\,20\,000$ en un banco que le ofrece el 5% anual, según la liquidación sea semestral, trimestral o mensual.
Aplicamos la fórmula correspondiente según la liquidación sea semestral, trimestral o mensual.

- Liquidación semestral:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n} \Rightarrow Cn = 20000 \cdot \left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{2\cdot 2} \Rightarrow 22076{,}26$$

- Liquidación trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} \Rightarrow Cn = 20000 \cdot \left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^{4\cdot 2} \Rightarrow 22089{,}72$$

- Liquidación mensual:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n} \Rightarrow Cn = 20000 \cdot \left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{12\cdot 2} \Rightarrow 22098{,}83$$

Observamos que cuanto más frecuentes sean los períodos de liquidación, más aumenta el capital.

Y TAMBIÉN: ¿?

Si los intereses se capitalizan semestralmente, trimestralmente o mensualmente, tendremos que expresar el tipo de interés y el tiempo en función del período de liquidación, siendo n el número de años.

Liquidación semestral:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$$

Liquidación trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}$$

Liquidación mensual:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n}$$

Actividades

22. Por un depósito de $\$\,15\,000$ hemos obtenido al cabo de dos años, un beneficio de $\$\,560$. ¿Qué interés simple nos aplica la entidad financiera?

23. Calcula qué beneficio producirá un capital de $\$\,35\,000$ durante 900 días al $6{,}5\%$ de interés simple anual.

24. Queremos efectuar un depósito de $\$\,2\,000$ a dos años. ¿Qué opción es la más beneficiosa: un interés simple del 6% o un interés compuesto del $5{,}75\%$?

25. Calcula el capital final que obtendremos por un depósito de $\$\,5\,000$ al $7{,}5\%$ de interés compuesto anual durante cinco años.

26. Por un depósito que efectuamos hace tres años, hemos obtenido un capital final de $\$\,6\,556{,}36$. Sabiendo que la entidad financiera nos aplica un 3% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad inicial ingresamos?

27. Calcula el capital final que obtendremos transcurridos tres años por un depósito de $\$\,2\,500$ al $6{,}25\%$ de interés compuesto anual, según la liquidación de intereses sea semestral, trimestral o mensual.

28. Calcula qué opción es la más beneficiosa para un depósito a un plazo de un año:

    a. Un interés anual del $5{,}25\%$ y una liquidación anual.

    b. Un interés anual del 5% y una liquidación mensual.

Tasa anual equivalente (TAE)

Hemos visto que los períodos de liquidación de intereses pueden ser inferiores a un año, y hemos comprobado también (ejemplo 23) que cuanto más frecuentes sean estos períodos de liquidación, más dinero recibimos.

Se plantea entonces la siguiente cuestión: ¿cuál es el tipo de interés anual real que se está aplicando si los períodos de liquidación son inferiores a un año?

Este interés se conoce como **tasa anual equivalente (TAE)**. A continuación, veremos, mediante un ejemplo, el modo de deducir la expresión que nos permite calcular la TAE.

Ejemplo 26

Un banco ofrece a sus clientes una cuenta corriente con un interés compuesto anual del 6% y con una liquidación de intereses mensual. ¿Qué TAE está ofreciendo?

Al 6% anual le corresponde un 0,5% mensual. Veamos cómo se incrementa un capital de 1 dólar.

- Al final del primer mes, el capital ha aumentado un 0,5%:

$$1 + 0{,}005 = 1{,}005$$

- Al término del segundo mes, ha aumentado un 0,5% respecto al mes anterior:

$$1{,}005 + 1{,}005 \cdot 0{,}005 = 1{,}010$$

o sea, se ha multiplicado por: $(1 + 0{,}005)^2 = 1{,}010$

- Al cabo del tercer mes ha aumentado un 0,5% respecto del mes anterior:

$$1{,}010 + 1{,}010 \cdot 0{,}005 = 1{,}015$$

es decir, se ha multiplicado por:

$(1 + 0{,}005)^3 = 1{,}015$

- Y así sucesivamente; después de los doce meses, el capital inicial se ha multiplicado por:

$$(1 + 0{,}005)^{12} = 1{,}062$$

Por lo tanto, una vez transcurrido un año, el aumento total del capital inicial ha sido:

$$1{,}062 = 1 + 0{,}062 = 1 + \frac{6{,}2}{100}$$

Así, pues, el 6% de interés anual, cuando los períodos de liquidación son mensuales, se convierte en un interés anual real; esto es, en una TAE, del 6,2%.

Y TAMBIÉN: ¿?

También en los préstamos bancarios se habla de la TAE correspondiente a un tipo de interés anual.

Observa esta información:

$5{,}95^{\%}$ NOMINAL $6{,}28^{\%}$ TAE (*)

(*) TAE calculada para un préstamo a 15 años de $ 60 000 comisión de apertura: 1 % (mínimo $ 450)

Si calculas la TAE correspondiente a la oferta bancaria del 5,95% comprobarás que es inferior a la TAE publicada. Eso pasa porque, al calcular la TAE de un préstamo o crédito, se incluyen además las comisiones de estudio y los gastos de apertura que cobra la entidad financiera para conceder el préstamo.

Así, pues, observamos que, a partir del proceso seguido en el ejemplo anterior, podemos deducir esta fórmula para calcular la TAE:

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

donde:

i: interés anual en tanto por uno

n: número de períodos de liquidación de intereses

Actividades

29. Carlos quiere efectuar un depósito de $ 1 000 a un año en una caja de ahorros que le ofrece un interés anual del 7%, y con un período de liquidación trimestral.
    a. ¿Qué TAE le aplicarán?
    b. ¿Qué beneficio obtiene Carlos con la liquidación trimestral respecto de la liquidación anual?
30. Rosa efectuó un depósito de $ 3 500 en una entidad bancaria que le ofrecía un interés del 6,5% anual, y lo retiró cuando habían transcurrido dos años. Sabiendo que el primer año la liquidación de los intereses fue mensual, y el segundo año, trimestral, calcula:
    a. La TAE para cada uno de los años.
    b. El capital final.

Demanda de fondos

Las personas y las empresas recurren en muchas ocasiones a las entidades financieras, para obtener recursos con el fin de financiar una adquisición para la que no tienen suficiente capital.

Las modalidades de financiación más frecuentes para la obtención de fondos son: los créditos y préstamos, el alquiler financiero o *leasing* y la bolsa de valores.

Créditos y préstamos

Son contratos financieros en los cuales se estipulan unas condiciones por las que un demandante de fondos recibe cierta cantidad de dinero.

En un crédito, el demandante tiene la facultad de disponer voluntariamente de una parte de la cantidad o de su totalidad. Así, se generarán intereses, dependiendo de la cantidad dispuesta y del tiempo de devolución.

En un préstamo, por el contrario, se dispone del capital en su totalidad y debe devolverse según lo acordado en el contrato.

La modalidad más frecuente de devolución o *amortización* de un préstamo es la amortización progresiva, por la cual, el demandante que recibe el préstamo abona a la entidad financiera el importe del préstamo y de los intereses correspondientes mediante cuotas periódicas y constantes.

Veamos, con un ejemplo, cómo calcular las cuotas de amortización.

Y TAMBIÉN: ¿?

Existen diferentes tipos de préstamos, entre los que destacan:

- Bancario: se obtienen de una entidad financiera como consecuencia de un préstamo aprobado en unas determinadas condiciones convenidas en el contrato.
- Hipotecario: en este tipo de préstamos, el solicitante da un bien inmueble como garantía del dinero recibido. Acostumbran a formalizarse en el respectivo registro de la propiedad.

TIC

Visita:

http://goo.gl/BiIOrQ

Ejemplo 27

Ana y Raúl solicitan un préstamo de $ 100 000 al 8,5% anual para la compra de un departamento. Lo amortizarán en 15 años mediante pagos anuales iguales. ¿Qué cantidad deberán pagar cada año?

Debemos tener en cuenta, por un lado, los intereses que produce el capital inicial que la entidad financiera ha prestado, C, y, por otro, los intereses que producen las cantidades que se van abonando.

Para saber en qué cantidad se convertirían los $ 100 000 colocados al 8,5% de interés compuesto, aplicamos la fórmula:

$$C_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$C_{15} = 100\,000\,(1 + 0{,}085)^{15} = 339\,974{,}29 \text{ dólares}$$

Para calcular la cuota anual de amortización, debemos tener en cuenta los intereses que estas producen.

Pago cuota	Valor inicial	Tiempo (años)	Valor final
Primera	a	14	$a\,(1 + 0{,}085)^{14}$
Segunda	a	13	$a\,(1 + 0{,}085)^{13}$
Tercera	a	12	$a\,(1 + 0{,}085)^{12}$
...	...	...	...
Penúltima	a	1	$a\,(1 + 0{,}085)$
Última	a	0	a

Tabla 16

El capital total amortizado, C_a, al cabo de los 15 años, será la suma de los valores de la última columna:

$$C_a = a + a(1 + 0{,}085) + \dots + a(1 + 0{,}085)^{13} + a(1 + 0{,}085)^{14} =$$
$$= a(1 + 0{,}085 + \dots + 1{,}085^{13} + 1{,}085^{14})$$

Pero la expresión entre paréntesis es la suma de quince términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$ y la razón $r = 1{,}085$. Luego:

$$C_a = a \cdot \frac{1{,}085^{15} - 1}{0{,}085} \qquad C_a = a \cdot 28{,}232\,269$$

Puesto que esta cantidad ha de ser igual a C_{15}, se tiene:

$$C_{15} = a \cdot 28{,}232\,269 \Rightarrow 339\,974{,}29 = a \cdot 28{,}232\,269$$

$$a = \frac{339974{,}29}{28{,}232\,269} = 12\,042{,}05 \text{ dólares}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Liquidación semestral:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{2}}{1 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-2n}}$$

Liquidación trimestral:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{4}}{1 - \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{-4n}}$$

Liquidación mensual:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}}$$

Si repetimos el razonamiento del ejemplo anterior para un préstamo C a un tipo de interés i y a un término de n años, la cuota de amortización será:

$$a = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

En caso de que interese amortizar un préstamo a plazos inferiores a un año, habrá que modificar la fórmula como se hizo en el ejemplo del interés compuesto.

Ejemplo 28

Calculemos qué cuota anual debemos pagar si queremos amortizar un préstamo de $ 30 000 en cinco años y con un interés anual del 13%.

- ¿Y si lo amortizamos mensualmente?

Los datos del préstamo son:

$C = \$\,30\,000$, $i = 13\% = 0{,}13$ (tanto por uno), $n = 5$ años

Aplicamos la fórmula correspondiente para hallar la cuota anual:

$$a = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{30\,000 \cdot 0{,}13}{1 - (1 + 0{,}13)^{-5}} = 8\,529{,}44 \text{ dólares}$$

Aplicamos la fórmula correspondiente para hallar la cuota mensual:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}} = \frac{30\,000 \cdot \frac{0{,}13}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0{,}13}{12}\right)^{-12 \cdot 5}} = 682{,}59 \text{ dólares}$$

Actividades

31. Una moto que cuesta $ 4 870 la pagamos a través de una entidad financiera que cobra el 12% anual.

Si queremos pagarla en 24 mensualidades, ¿a cuánto ascenderá el recibo mensual?

32. ¿Qué cuota anual debemos pagar por un préstamo de $ 20 000 a cuatro años con un interés del 14%?

–¿Y si queremos amortizarlo mensualmente?

1 Resumen

Operaciones con funciones

En el conjunto de las funciones reales de variable real podemos definir diversas operaciones.

Adición	Sustracción
La función suma de f y g es la función que asigna a cada número real x la suma de las imágenes por la función f y por la función g: $f + g : x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$	La función diferencia de f y g es la función que asigna a cada número real x la diferencia de las imágenes por la función f y por la función g: $f - g : x \mapsto (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	**División**
La función producto de f y g es la función que asigna a cada número real x el producto de las imágenes por la función f y por la función g: $f \cdot g : x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	La función cociente de f y g es la función que asigna a cada número real x el cociente de las imágnes por la función f y por la función g: $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

Tabla 17

- Una **sucesión de números reales** es un conjunto de números reales en correspondencia con el conjunto de los números naturales. Cada uno de ellos se denomina **término** de la sucesión.
- La expresión de un término cualquiera de una sucesión en función del lugar que ocupa se denomina **término general.**
- Una progresión geométrica es una sucesión en la que el cociente entre un término cualquiera, excepto el primero, y su anterior es una cantidad constante. Esta cantidad constante se llama razón de la progresión y se representa por r.
- La expresión del término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

- La expresión de la suma de *n* términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

- La expresión del producto de *n* términos de una progresión geométrica es:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

- La interpolación de términos geométricos es el proceso de colocar un cierto número de términos entre dos dados, a y b, de manera que resulte una progresión geométrica de extremos a y b.
- La razón de la progresión geométrica que resulta al interpolar k términos entre a y b es:

$$r = \sqrt[(k+1)]{\frac{b}{a}}$$

- El interés simple *i* que obtenemos a partir de un capital C con un interes i expresado en tanto por uno y a lo largo de n años es:

$$I = C \cdot i \cdot n$$

- El capital final C_n que se obtiene al depositar un capital inicial C a un tipo de interés compuesto i expresado en tanto por uno durante n años es:

$$C_n = C \cdot (1 + i)^n$$

- La TAE es el tipo de interés anual real correspondiente a un determinado tipo de interés, i, cuando los períodos de liquidación, n, son inferiores a un año:

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

- El capital final C_f que se obtiene a partir de cada anualidad de capitalización a_f del tipo de interés anual i en tanto por uno y el tiempo n en años, es:

$$C_f = \frac{a(1 + i)^{-n}[(1 + i)^{-n} - 1]}{i}$$

- La cuota anual de amortización a de un préstamo C, a un tipo de interés i expresado en tanto por uno y a un plazo de n años es:

$$a = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Problemas resueltos

A

1. Halla la progresión geométrica de la que conocemos el término $a_4 = 32$ y en la que la diferencia entre el sexto y el quinto término es 64.

Solución

- Los datos del enunciado son:

$$a_4 = 32 \text{ y } a_6 - a_5 = 64$$

- Expresamos cada uno de los términos en función del primero y de la razón:

$$\left.\begin{array}{r} a_1 \cdot r^3 = 32 \\ a_1 \cdot r^5 - a_1 \cdot r^3 = 64 \end{array}\right\}$$

–Obtenemos un sistema de ecuaciones.

- Resolvemos el sistema. Para ello, despejamos a_1 de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$a_1 = \frac{32}{r^3}$$

$$\frac{32}{r^3} \cdot r^5 - \frac{32}{r^3} \cdot r^4 = 64$$

$$32 \cdot r^2 - 32 \cdot r = 64$$

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

- Para cada valor de r, hallamos el valor de a_1 correspondiente:

$$r = 2 \Rightarrow a_1 = 4$$

La progresión geométrica es: 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

$$r = -1 \Rightarrow a_1 = -32$$

La progresión geométrica es: -32, 32, -32, 32, -32, 32, ...

Existen pues dos progresiones geométricas que verifican las condiciones del enunciado.

B

2. Calcula el valor de x si $3x - 1$; $1 - 2x$ y $2x - 5$ son términos consecutivos de una sucesión aritmética.

Solución

Siendo una sucesión aritmética, entonces es posible relacionar dos de los tres términos de la sucesión, para determinar la diferencia. Relacionando los términos a_3 y a_2 tendremos:

$$d = a_3 - a_2$$
$$d = 2x - 5 - (1 - 2x)$$
$$d = 2x - 5 - 1 + 2x$$
$$d = 4x - 6$$

Ahora también podemos relacionar los términos a_2 y a_1, debido a que la diferencia es la misma que en el análisis anterior entre a_2 y a_1, entonces:

$$d = a_2 - a_1$$
$$d = 1 - 2x - (3x - 1)$$
$$d = 1 - 2x - 3x + 1)$$
$$d = -5x + 2$$

Debido a que las dos diferencias deben ser iguales, se establece la ecuación:

$$4x - 6 = -5x + 2$$

Resolviendo la ecuación : $9x = 8$ entonces $x = \frac{8}{9}$

3. Halla $f + g$ y $(f + g)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ considerando las funciones $\text{sen} : x \mapsto f(x) = \text{sen}\, x$; $g : x \mapsto g(x) = 1 + x$

Solución

$f + g : x \mapsto (f + g)(x) = \text{sen}\, x + 1 + x \Rightarrow$ Ahora $(f + g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$= (f + g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ejercicios y problemas

1 Análisis de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

1. ¿Cómo identifica una función inyectiva, utilizando los métodos algebraico, numérico y gráfico?

2. Verifica si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico.

   a. $g : x \mapsto g(x) = -4x - \frac{1}{2}$

   b. $f : x \mapsto f(x) = -x^2 + 7$

   c. $h : x \mapsto h(x) = 2\sqrt{x} + 3$

   d. $f : x \mapsto f(x) = -x^3 + 2x$

   e. $f : x \mapsto f(x) = \frac{-x}{3} + 3$

3. Verifica si las funciones anteriores son inyectivas, utilizando el análisis gráfico y la tabla de valores.

4. Analiza la sobreyectividad de las funciones definidas de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que se detallan a continuación, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.

   a. $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 10$

   b. $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x - 1}$

   c. $f : x \mapsto f(x) = -x + \frac{3}{4}$

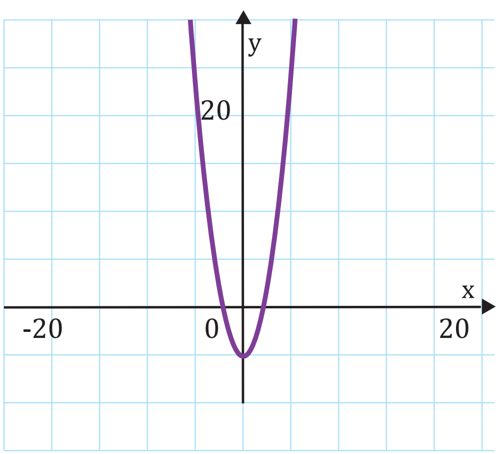
   d. $f : x \mapsto f(x) = |x + 4|$

   e. $f : x \mapsto f(x) = 4 - \sqrt{x + 2}$

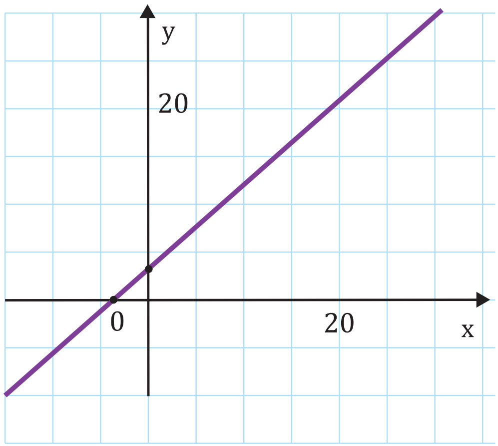
   f. $f : x \mapsto f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

5. Analiza las siguientes gráficas y determina si son funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Argumenta tu respuesta.

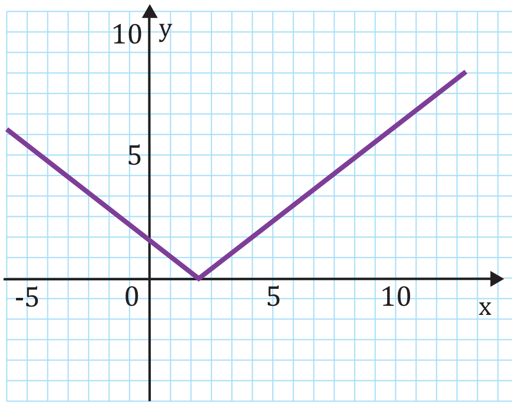
a.



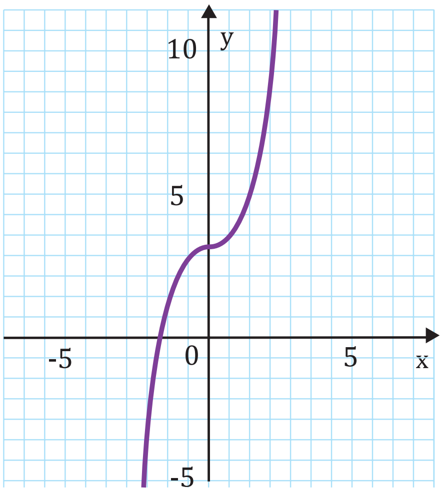
b.



c.



d.



6. Responde V si es verdadero o F si es falso, analizando los siguientes incisos y justificando su respuesta.

   a. Todas las funciones inyectivas son biyectivas.
   b. Sea la función f:A⟶B, será sobreyectiva cuando el Rec $(f) = A$.
   c. Todas las funciones biyectivas son inyectivas.
   d. Si se interceptan dos puntos entre la curva de una función con una línea horizontal, la función es inyectiva.
   e. Algunas funciones inyectivas son sobreyectivas.
   f. Toda función biyectiva es sobreyectiva.

7. Sean $f: x \mapsto f(x) = x^2 - 3$, $g: x \mapsto g(x) = 2x + 8$ y $h: x \mapsto h(x) = 4x^3 + 3$. Determina.

   a. $(f + g)(3)$
   b. $g + h$
   c. $f - g$
   d. $(g - h)\left(\frac{1}{4}\right)$
   e. $\left(\frac{f}{h}\right)(3) + (g)(-1)$

8. Halla la función suma de cada par de funciones. Luego, determina su dominio.

   a. $f: x \mapsto f(x) = 3x; g: x \mapsto g(x) = x^2 - 4$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-4}; g: x \mapsto g(x) = x + 2$
   c. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-1}; g: x \mapsto g(x) = \sqrt{x+3}$
   d. $f: x \mapsto f(x) = -x + 3; g: x \mapsto g(x) = \frac{5}{x+5}$
   e. $f: x \mapsto f(x) = -x^2 - x; g: x \mapsto g(x) = x - 2$
   f. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x+3}; g: x \mapsto g(x) = \frac{2}{x+2}$

9. Contesta las siguientes preguntas, analizando las funciones y las operaciones respectivas:

   $f: x \mapsto f(x) = 4x - 4; g: x \mapsto g(x) = \sqrt{x+2};$

   $h: x \mapsto h(x) = \frac{1}{x-2}$

   a. Los dominios de $\left(\frac{f}{h}\right)$ y $\left(\frac{h}{f}\right)$. ¿Son iguales? Explica.
   b. ¿Es el dominio de $(f - g)$ igual al dominio de $(f \cdot g)$? ¿Por qué?
   c. Los dominios de $(f + g)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)$. ¿Son iguales? ¿Por qué?
   d. ¿Es el dominio de g igual al dominio de $(g + h)$? ¿por qué?
   e. Los dominios de $\left(\frac{f}{g}\right)$ y $\left(\frac{g}{h}\right)$. ¿Son iguales? Explica.

10. Dadas las funciones $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+2}$ $g: x \mapsto g(x) = x - 2$. Halla.

   a. $(f \circ g)(x) =$
   b. $(g \circ f)(x) =$

2 Composición de funciones

11. Sean $f: x \mapsto f(x) = 3x^2 - 2$; $g: x \mapsto g(x) = 2x^3 - 5$ y $h: x \mapsto h(x) = \sqrt{(x+2)}$. Halla.

   a. $(f \circ g)(x)$
   b. $(h \circ f)(3)$
   c. $(f \circ g)(2)$
   d. $(h \circ f)(x)$
   e. $(f \circ g)(-3)$

12. Determina $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para cada par de funciones.

   a. $f: x \mapsto f(x) = 4x + 1; g: x \mapsto g(x) = 3x$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-5}; g: x \mapsto g(x) = \frac{x}{5}$
   c. $f: x \mapsto f(x) = 2x + 4\sqrt{x}; g: x \mapsto g(x) = 9x^2$
   d. $f: x \mapsto f(x) = 14x + 4; g: x \mapsto g(x) = \frac{x}{7}$
   e. $f: x \mapsto f(x) = 4x^2; g: x \mapsto g(x) = 2\sqrt{4x}$
   f. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-2}; g: x \mapsto g(x) = x - 2$

13. Verifica si la función f es inversa de g demostrando mediante la composición de funciones.

   a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{4}$ y $g: x \mapsto g(x) = 4x - 3$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x}$ y $g: x \mapsto g(x) = \frac{1}{x-1}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x+5}{x}$ y $g: x \mapsto g(x) = \frac{x-3}{5}$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ y $g: x \mapsto g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

3 Progresiones

14. Escribe los elementos de la progresión aritmética que se describe a continuación.

a. Si: $a_1 = 3$, $d = 3$, $n = 2$

b. $d = -2$; $a_1 = 5$, $n = 4$

c. $a_3 = 10$, $a_4 = \frac{21}{2}$, $n = 5$

d. $a_1 = 4$, $a_4 = 5$, $d = \frac{1}{3}$, $n = 6$

e. $a_1 = 6$, $a_6 = 5$, $d = -\frac{1}{5}$, $n = 8$

f. $a_1 = 12$, $a_5 = \frac{21}{2}$, $d = -\frac{3}{8}$, $n = 6$

15. Determina la variable que se indica en la derecha, considerando los elementos de las expresiones: término n-ésimo y suma de una progresión aritmética.

a. $a = 9$, $n = 8$, $d = 2$; a_n

b. $n = 6$, $d = -7$; $a_n = 90$; a

c. $a = 2$, $a_n = 14$, $n = 7$; S_n

d. $S_n = 0$, $n = 9$, $a = 16$; a_n

e. $a = 9$, $d = -3$, $S_n = 0$; n

16. Hemos suscrito un plan de ahorro a seis años por el cual cada año depositamos $ 1800 en régimen de capitalización compuesta al 9,25% anual. ¿Qué capital tendremos al cabo de los seis años?

17. Una computadora cuesta $ 2100. Si un joven ha estado ahorrando $ 220 cada trimestre durante dos años en una libreta que da el 8% anual, ¿podrá comprarse la computadora al cabo de los dos años?

18. Una persona contrata con una entidad de seguros, una prima anual de $ 800 para un plan de pensiones. Si se jubila dentro de 18 años, ¿qué capital tendrá si la aseguradora lo capitaliza al 12%?

19. ¿Qué importe total deberemos devolver por un préstamo de $ 30 000 al cabo de tres años y con un interés compuesto del 14% anual si lo amortizamos anualmente?

20. Una compañía de seguros prevé a un asegurado 30 años más de vida. Este ha contratado un seguro de vida de $ 100 000. ¿Qué cuota anual debe pagar si se capitaliza al 8%?

21. Pedimos un crédito hipotecario de $ 100 000 al 5,5% de interés compuesto anual. Sabiendo que sólo podemos pagar una mensualidad de $ 900, ¿durante cuánto tiempo deberemos pagar el crédito?

22. Halla las dos cantidades a_n, a, n, d, o s_n que faltan en cada uno de los problemas.

a. $a_1 = 13{,}5$, $a_n = 26$, $S_n = 118{,}5$

b. $n = 6$, $d = -7$; $a_n = 90$; a

c. $a = 2$, $a_n = 14$, $n = 7$; S_n

d. $S_n = 0$, $n = 9$, $a = 16$; a_n

23. Resuelve.

a. Determina el quinto y sexto término de la progresión aritmética : $8x - 12$, $9x - 7$, $10x - 2$ y $11x + 3$,..

b. Determina los valores de a y b , siendo: los términos : $a + 2b$, $3a + 5b$, $-a - 2b$ elementos consecutivos de un progresión aritmética.

24. Resuelve los problemas.

a. Un comisionista cobra por artículo vendido un valor económico a razón de $ 0,25 el primer artículo, $ 0,40 el segundo, $ 0,55 el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos artículos logra vender, si el total de ventas es de $ 33,50?

b. María ingresa a un plan de ahorro mensual, cada mes ahorra $ 20 más que el mes anterior. Si el plan dura un año, y al final sus ahorros suman $ 1 680. Determina.

- ¿Cuánto ahorró el primer mes?
- Y ¿el último?.

Para finalizar

1. Responde V si es Verdadero o F si es falso, según corresponda.

a. Las funciones inversas se verifican mediante el concepto de composición de funciones.

b. Todas las funciones tiene inversa.

c. El quinto término de la progresión: 2, 1, $\frac{1}{2}$,...es $\frac{1}{4}$,..

d. La función inyectiva se verifica gráficamente por un punto de intersección con la línea vertical.

2. ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f : x \mapsto f(x) = 3x - 2$?

a. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x}{3} + 2$

b. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x + 2}{3}$

c. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x - 2}{3}$

d. $g : x \mapsto g(x) = \frac{2 - x}{3}$

3. **Determina** si las siguientes funciones son biyectivas; en caso afirmativo, **determina** la inversa.

a. $h : x \mapsto h(x) = \frac{5x}{3} - 4$

b. $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 2$

4. **Subraya** la respuesta correcta según corresponda:

- ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f : x \mapsto f(x) = x^3 + 4$?

a. $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x - 4}$

b. $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x} - 1$

c. $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x + 1}$

d. $g : x \mapsto g(x) = 1 - x^3$

5. Con la siguiente función: $f : x \mapsto f(x) = 4x - 5$

a. **Determina** si es inyectiva algebraicamente.

b. **Realiza** la representación gráfica.

c. **Determina** la inversa.

d. **Determina** $f^{-1}(x)$.

e. **Determina** $f^{-1} \circ f^{-1}(3)$.

f. Si $g(x) = -x^2 - 1$, **Halla** $f + g$.

g. **Determina** el dominio de $f \cdot g$.

6. En la progresión : $2x - 5; 3x - 2; 4x + 1; 5x + 4$. **Calcula.**

a. La diferencia en la progresión.

b. El quinto y sexto término.

c. La suma de los 6 términos

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

El denominado interés compuesto es una progresión geométrica. Comparemos varias inversiones con diferentes intereses compuestos, o progresiones geométricas:

AÑO	Interés 4%	Interés 6%	Interés 8%	Interés 10%
1	100	100	100	100
5	116,99			146,41
10	142,33			235,79
20	210,68			611,59
30	311,87			1568,31
40	461,64		2011,53	4114,48
50	683,33	1737,75	4342,74	10,671,90

En el quinto año, las diferencias no parecen muy grandes pero a medida que van pasando los años, pasan a ser enormes.

Este tema, el crecimiento futuro de las inversiones es absolutamente clave para un inversor. Es muy común comparar dos inversiones únicamente por la rentabilidad que se va a obtener el primer año y ni siquiera considerar la posible evolución futura de cada una ellas a largo plazo. Sin embargo, para un inversor de largo plazo, el primer año es el menos importante de todos. La clave está en el crecimiento futuro que vayan a tener cada una de las alternativas que está considerando.

http://www.invertirenbolsa.info/articulo_progresion_geometrica_interes_compuesto.htmt



http://goo.gl/hzGvge

SENTIDO CRÍTICO

En los torneos de tenis, es evidente la potencia de dos, ya que se realizan cuadros de enfrentamiento con la siguiente dinámica: En la final, se enfrentan dos jugadores; en la semifinal hay cuatro; en los cuartos de final hay ocho jugadores. Así, en cada ronda adicional la cantidad de jugadores se duplica. Si el torneo tuviera 25 rondas, podrían participar casi todos los habitantes de España, y son suficientes 33 rondas para que participen todos los habitantes del planeta.



http://goo.gl/ooqUFH

SI YO FUERA....

Un doctor en Microbiología...

Podría calcular el crecimiento de cierto tipo de bacterias, considerándolas como un crecimiento constante (reproducción por bipartición), colaborando de esta forma con programas de prevención y control de epidemiología en los hospitales y laboratorios.



http://goo.gl/jK89iM



2 Funciones Trigonométricas

CONTENIDOS:



http://goo.gl/l3Apa9

En Internet

La optimización de funciones es un tema recurrente en varios ámbitos. En la página http://bit.ly/1z1cp6H encontrarás dos posibles soluciones a problemas de optimización de transporte.

EN CONTEXTO

Computadoras y medicina

Las computadoras utilizan trigonometría para establecer las sombras y colores de las imágenes en la pantalla. Un sistema llamado triangulación define la forma del objeto y utiliza funciones trigonométricas para establecer los colores de las imágenes.

Este proceso tiene usos significativos en la medicina. Las máquinas de resonancia magnética escanean tu cuerpo y muestran la imagen a color en una pantalla de computadora. Los profesionales médicos utilizan los resultados para determinar la causa y localización de cánceres y tumores.

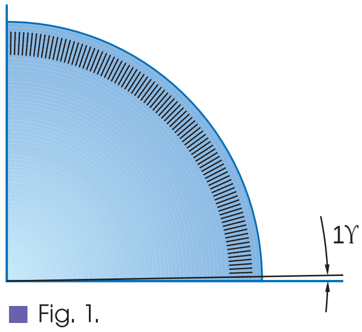


Fig. 1.

CALCULADORA

Las calculadoras científicas poseen la tecla [° ' "], que nos permite transformar la expresión compleja de un ángulo en su incompleja y viceversa.

Así, para calcular, por ejemplo, la forma incompleja de 2° 15' 5" tecleamos:

[2] [° ' "] [1] [5] [° ' "] [5] [° ' "] [EXE]

En la pantalla de la calculadora aparece

2.2513889 , que es la forma incompleja que buscamos.

Para pasar de la forma incompleja a la compleja, usamos las tecla [INV] y [° ' "].

Así, para obtener la forma compleja de 16,38° tecleamos:

[1] [6] [·] [3] [8] [EXE] [INV] [° ' "]

En la pantalla de la calculadora aparece 16°22°48° .

Este resultado debe interpretarse como 16° 22' 48".

1. MEDIDA DE ÁNGULOS

Siempre que medimos una magnitud, debemos tomar una unidad. Existen varias unidades de medida de ángulos. Las más utilizadas son:

- El grado sexagesimal, que con sus submúltiplos, el minuto y el segundo, constituyen el *sistema sexagesimal* de medida de ángulos.
- El radián, que es la unidad de medida de ángulos en el SI.

Medidas en el sistema sexagesimal

La unidad fundamental de medida de ángulos en el sistema sexagesimal es el grado sexagesimal (°) que, como sabes, es la razón 1/90 parte de un ángulo recto (fig. 1).

Para medir ángulos pequeños, utilizamos los submúltiplos del grado:

$$1 \text{ minuto } (1') = \frac{1}{60} \text{ de grado}$$

$$1 \text{ segundo } (1'') = \frac{1}{60} \text{ de minuto}$$

El paso de unas unidades a otras se efectúa según el siguiente esquema:

Grado (°) —x 60→ Minuto (') —x 60→ Segundo ('')

Segundo ('') —: 60→ Minuto (') —: 60→ Grado (°)

Forma compleja y forma incompleja

Una medida angular en el sistema sexagesimal puede venir expresada en una única unidad (forma incompleja) o en varias (forma compleja).

Ejemplo 1

Expresemos en forma incompleja de segundos $35° \, 17' \, 26''$.

$$35° = 35° \cdot \frac{3600''}{1°} = 126000''$$

$$17' = 17' \cdot \frac{60''}{1'} = 1020''$$

$$126000'' + 1020'' + 26'' = 127046''$$

Ejemplo 2

Expresemos en forma compleja 32046''.

32046''	60		
2040''	534'	60	
246''	54'	8°	
6''			

$$32046'' = 8° \, 54' \, 6''$$

1.1. Medidas en el Sistema Internacional

Como hemos dicho, la unidad de medida de ángulos en el SI es el radián (rad). Para definirlo, procedemos del siguiente modo:

- Trazamos una circunferencia de radio arbitrario y marcamos un radio OA.
- A partir del punto A tomamos un arco AB de longitud igual a la del radio.
- El ángulo central AOB que abarca el arco AB mide un radián.

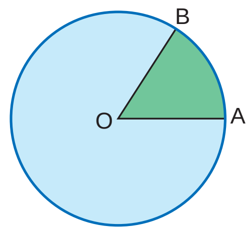


Fig. 2.

> Un radián es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.

1.2. Equivalencia entre grados y radianes

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, esta contiene 2π veces la longitud del radio. Por tanto:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Esta equivalencia permite pasar de grados a radianes, y viceversa, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

Expresemos en radianes el ángulo $\alpha = 25{,}3°$.
Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, de manera que aparezcan los grados en el denominador:

$$25{,}3° \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{25{,}3\pi}{180} = 0{,}44 \text{ rad}$$

Ejemplo 4

Expresemos en el sistema sexagesimal el ángulo $\beta = \frac{5\pi}{12}$ rad

Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, pero ahora de manera que aparezcan los radianes en el denominador:

$$\frac{5\pi}{12} \text{rad} \cdot \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 75°$$

Y TAMBIÉN

Sistema centesimal

Además de las unidades del sistema sexagesimal y los radianes, existen otras unidades de medida de ángulos: el grado, el minuto y el *segundo centesimales*.

Un grado centesimal (1g) es la centésima parte de un ángulo recto.

Sus submúltiplos, el minuto y el segundo, se definen como sigue:

1 **minuto** $(1^m) = \frac{1}{100}$ de grado

1 **segundo** $(1^s) = \frac{1}{100}$ de minuto

Así, el paso de unas unidades a otras se efectúa según el esquema.

Grado(^{g}) → $\times 100$ → Minuto(^{m}) → $\times 100$ → Segundo(^{s})

Segundo(^{s}) → $:100$ → Minuto(^{m}) → $:100$ → Grado(^{g})

La ventaja de este sistema es que la transformación de una expresión compleja a incompleja, y viceversa, es automática. **Observa**:

$48{,}5216^g \Leftrightarrow 48^g\, 52^m\, 16^s$

Actividades

1. **Expresa** en forma incompleja de segundos:

   a. $\alpha = 38°\, 25'\, 12''$ b. $\alpha = 5°\, 12'\, 23''$

2. **Expresa** en forma compleja:

   a. $\alpha = 324752''$ c. $\alpha = 45563''$

   b. $\alpha = 124568''$ d. $\alpha = 5652'$

3. **Expresa** en radianes los siguientes ángulos:

   a. $57°\, 15'\, 32''$ b. $45{,}84°$ c. $65°\, 34'\, 2''$ d. $15{,}65°$

4. **Expresa** los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal. **Escribe** el resultado en forma compleja.

   a. $\frac{5\pi}{3}$ rad b. $1{,}43$ rad c. $\frac{\pi}{8}$ rad d. $\frac{5\pi}{6}$ rad

2. LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los términos seno, coseno y tangente los hemos escuchado dentro del compendio formal de trigonometría, utilizándose los cocientes de cada función para resolver triángulos rectángulos.

En el eje horizontal, disponemos la variable independiente (x), cuyos valores ingresados son medidas de ángulos, en radianes y en grados, para contribuir en la comprensión. Mientras que en el eje vertical, ubicamos los valores que se obtiene luego de ingresar los datos en la función, los mismos que son valores numéricos expresados en la forma racionalizada, que son elementos de la variable dependiente (y).

2.1. Gráfica de la curva trigonométrica seno

Función seno

Veamos cómo podemos definir una función que asigne al valor de un ángulo, medido en radianes , el valor de, por ejemplo, su seno.

Observa la figura. Dado un ángulo α, el valor de su seno viene dado por la ordenada del punto P.

> La función que asigna a la variable independiente x (x es α en radianes en la siguente tabla) el valor $f(x) = \text{sen}\ (x)$ se llama función seno.

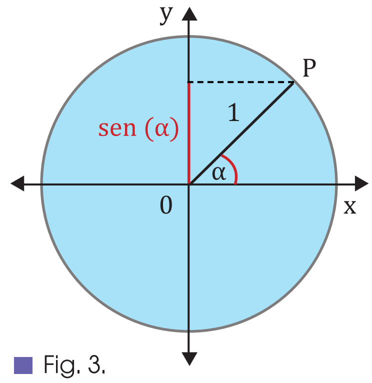


Fig. 3.

En esta ocasión, analizaremos las características particulares que presenta la función seno, definido por $f(x) = \text{sen}\ x$, revisando la tabla de valores y representación gráfica en un período tomado desde 0 a 2π (0 a 360 º).

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0 º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
$f(x) = \text{sen}\ x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	- 1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(x, sen (x)	$\{(0,0);\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{\pi}{2},1\right);\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)(\pi,0);\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{3\pi}{2},-1\right);\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{11\pi}{6},\frac{1}{2}\right);(2\pi,0)\}$												

Tabla 1.

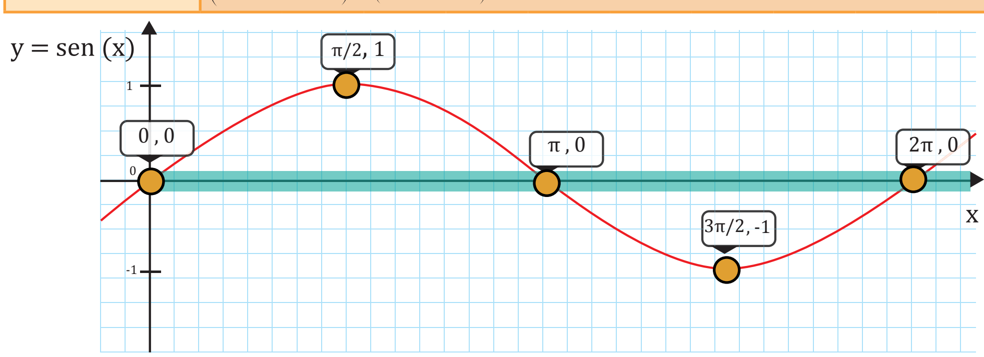


Fig. 4.

> Una función f es periódica de período T si existe un número real positivo T tal que, para cualquier x del dominio de f, se verifica: $f(x + T) = f(x)$

Si T es un período de la función, también lo será un múltiplo cualquiera de T. Al mínimo valor de T que cumple la definición anterior se le llama período fundamental.

Las curvas trigonométricas tienen la particularidad de ser funciones periódicas, en la ilustración se muestra el análisis de un periodo horizontal (2π).

Características de la función trigonométrica seno

A continuación, describimos las características de la función, seno definido por $f(x) = \text{sen}(x)$

$\text{sen} : x \mapsto f(x) = \text{sen}\ (x)$
Dominio: Los números reales
Recorrido: $[-1; 1]$
Intersecciones con el eje horizontal x: $(0\ ,0)$, $(\pi\ ,0)$, $(2\pi\ ,0)$...
Intersecciones con el eje vertical y: $(0, 0)$
Es una función continua.
La función es simétrica con respecto al origen.
No presente asíntotas.
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
Mínimo relativo: $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

Tabla 2.

Además de las características descritas, analizaremos los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento) y concavidad en la siguiente tabla.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	Crece de 0 a 1	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	Decrece de 0 a -1	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba

Tabla 3.

La gráfica de la función $y = \text{sen}\ (x)$, descrita en más de un período, que constituye una cima y un valle.

Actividades

5. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, tres períodos de la función $\text{sen}: x \mapsto f\ (x) = \text{sen}\ x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.

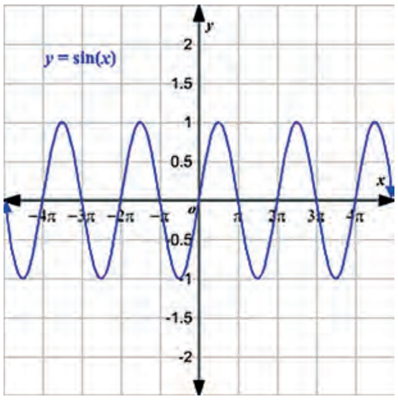


Fig. 5.

2.2. Gráfica de la curva trigonométrica coseno

A la función coseno se denota con cos.

Examinemos ahora las características particulares que presenta la función coseno definido por $f(x) = \cos x$, indagando la tabla de valores y representación gráfica en un período tomado desde 0 a 2π (0 a $360°$).

Función coseno

Vamos a definir ahora la función que asigna al valor de un ángulo, medido en radianes, el valor de su coseno.

Dado un ángulo α como el de la figura, el valor de su coseno viene dado por la abscisa del punto P.

> La función que asigna a la variable independiente x (x es α en rad en la siguiente tabla) el valor $f(x) = \cos x$ se llama función coseno.

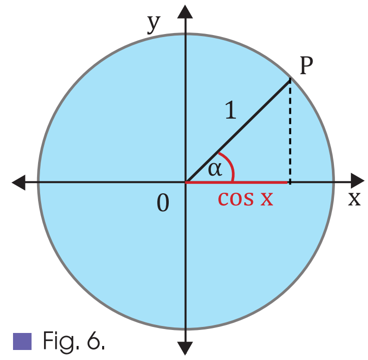


Fig. 6.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$f(x) = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$(x, \cos(x))$	$\{(0,1); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); (\pi, -1); \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (2\pi, 1)\}$												

Tabla 4.

Representación gráfica de la función coseno en el intervalo (0;2π)

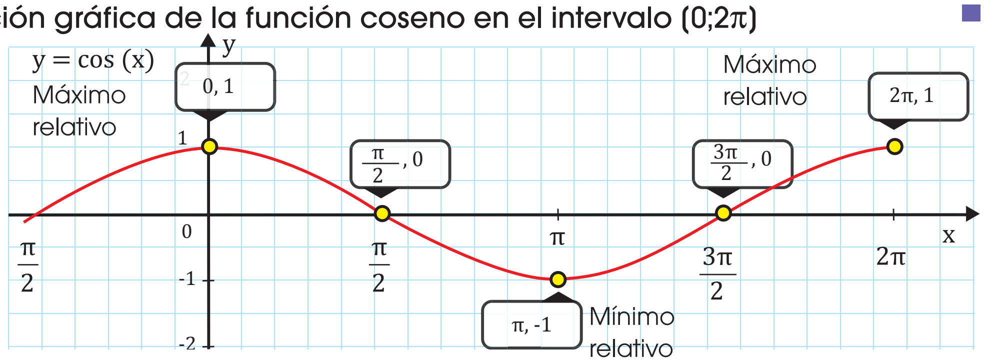


Fig. 7.

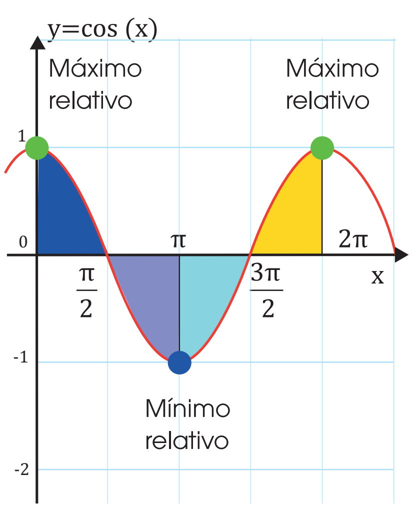


Fig. 8.

Características de la función trigonométrica coseno

$\cos: x \mapsto f(x) = \cos(x)$
Dominio: Los números reales
Recorrido: $[-1; 1]$
Intersecciones con el eje x: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ ...
Intersecciones con el eje y: $(0, 1)$
Es una función continua.
La función es simétrica con respecto a la recta, $x=0$ o con respecto al eje y.
No presente asíntotas.
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximo relativo: $(0, 1)$ y $(2\pi, 1)$, ...
Mínimo relativo: $(\pi, -1)$, ...

Tabla 5.

Características de variación de la función trigonométrica coseno (crecimiento y decrecimiento) y concavidad

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	Decrece de 0 a -1	Cóncava hacia arriba
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de 0 a 1	Cóncava hacia abajo

Tabla 6.

Comparación gráfica de las funciones seno y coseno

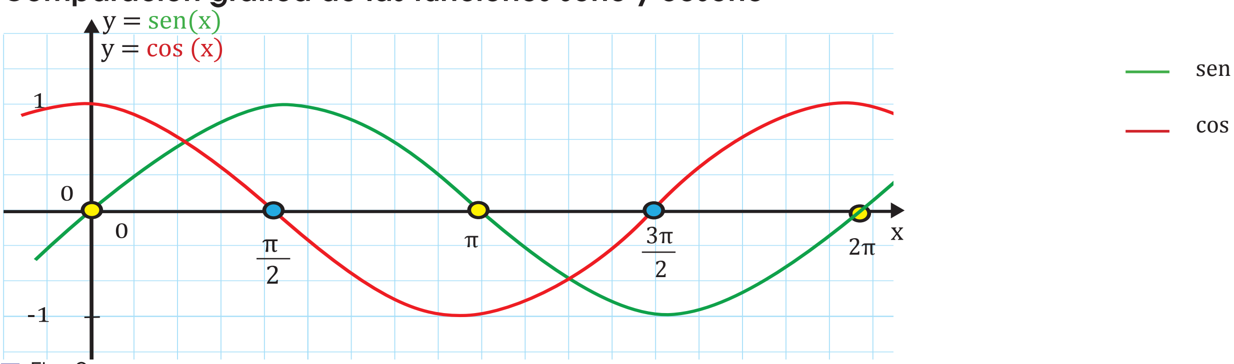


Fig. 9.

	Seno	Coseno
Dominio	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
Recorrido	$y \in [-1, 1]$	$y \in [-1, 1]$
Intersección eje X	$(0,0); (\pi,0); (2\pi,0), ...$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), ...$
Intersección eje Y	$(0, 0)$	$(0, 1)$
Continuidad	Si es continua	Si es continua
Simetría	Respecto al origen	Respecto a la recta x= 0 o con respecto al eje y
Asíntotas	No	No
Inyectividad	No	No
Sobreyectividad	No	No
Máximo relativo	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), ...$	$(0, 1)$ y $(2\pi, 1), ...$
Mínimo relativo	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), ...$	$(\pi,-1), ...$
Intervalos de crecimiento	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$x \in [\pi, 2\pi]$
Intervalos de decrecimiento	$x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	$x \in [0, \pi[$
Cóncava hacia arriba	$(\pi, 2\pi), ...$	$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], ...$
Cóncava hacia abajo	$(0, \pi), ...$	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], ...$

Tabla 7.

2.3. Gráfica de la curva trigonométrica tangente

Analicemos las características exclusivas que presenta la función tangente, denotado por $\tan$ y definido por $f(x) = \tan x$, analizando la tabla de valores y representación gráfica en un período tomado desde 0 a 2π (0 a $360°$).

Función tangente

Podemos definir también la función que asigna al valor de un ángulo, medido en radianes, el valor de su tangente.

Dado un ángulo α como el de la figura, el valor de su tangente viene dado por el cociente entre la ordenada y la abscisa del punto P.

> La función que asigna a la variable independiente x (x es α en radianes en la siguiente tabla), el valor $f(x) = \tan(x)$ se llama función tangente.

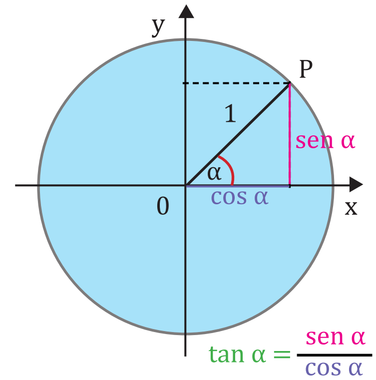
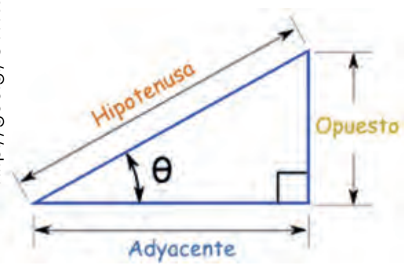


Fig. 10.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
$f(x) = \tan x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$(x, \tan(x))$	$\{(0,1);\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right);\left(\frac{\pi}{2},\text{N.D.}\right);\left(\frac{2\pi}{3},-\sqrt{3}\right);\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);(\pi,0);\left(\frac{7\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{4\pi}{3},\sqrt{3}\right);\left(\frac{3\pi}{2},\text{N.D.}\right);\left(\frac{5\pi}{3},-\sqrt{3}\right);\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);(2\pi,0)\}$													

Tabla 8.

http://goo.gl/OVFrWf



- Recordemos que:

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

Fig. 11.

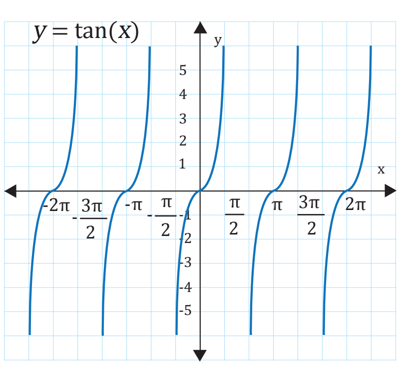


Fig. 12.

Características de la función trigonométrica tangente en el intervalo $[0, 2\pi]$

$\tan: x \mapsto f(x) = \tan(x)$
Dominio: $\mathbb{R}$- $\{\pi/2 + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
Recorrido: Los reales
Intersecciones con el eje x: $(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
Intersecciones con el eje y: $(0, 0)$
Es una función continua en los reales salvo en los punto en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al origen.
Presenta asíntotas en los puntos $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
No posee máximos ni mínimos relativos.
Es estrictamente creciente en todo su dominio.

Tabla 9.

2.4. Gráfica de la curva trigonométrica cosecante

La función cosecante es la razón trigonométrica inversa del seno y se simboliza como csc o cosec y se define csc: $x \mapsto f(x) = \csc(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\,(x)}$; $\text{sen}\,(x) \neq 0$. Veamos las características que presenta $f(x)=\csc x$, examinando la tabla de valores y su representación gráfica en un período que va desde 0 a 2π (0 a 360°)

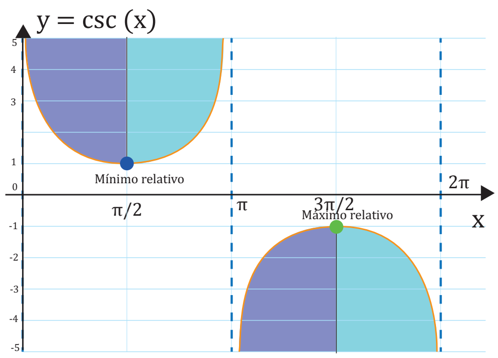
Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x)=\csc(x)$	N.D	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D
$(x, \csc(x))$	$\{(0,\text{N.D}); \left(\frac{\pi}{6}, 2\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \left(\frac{\pi}{2}, 1\right); \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, 2\right); (\pi; \text{N.D}); \left(\frac{7\pi}{6}, -2\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, -2\right); (2\pi, \text{N.D})\}$												

■ Tabla 10.

Características de la función trigonométrica cosecante en el intervalo $[0, 2\pi]$

csc: $x \mapsto f(x) = \csc x$
Dominio: $\mathbb{R}$- $\{n.\pi\}$ con $n \in Z$
Recorrido: $\mathbb{R}$- $]1.-1[$
No corta al eje X ni al eje Y
Intersecciones con el eje y: NO
Es una función continua en los reales salvo en los punto en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al origen
Presenta asíntotas en los puntos $(0,0)$; $(\pi,0)$ y $(2\pi, 0)$
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximos relativos: $x = \frac{3\pi}{2}$
Mínimos relativos: $x = \frac{\pi}{2}$

■ Tabla 11.



■ Fig. 13.

En la siguiente tabla se muestra las características de crecimiento, decrecimiento y concavidad de la función.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	decrece de $+\infty$ a 1	Cóncava hacia arriba
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	crece de 1 a $+\infty$	Cóncava hacia arriba
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	crece de $-\infty$ a -1	Cóncava hacia abajo
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	decrece de -1 a $-\infty$	Cóncava hacia abajo

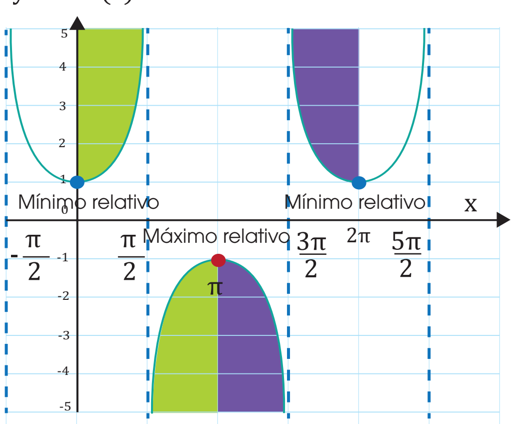
■ Tabla 12.

2.5. Gráfica de la curva trigonométrica secante

Ahora, observemos las características que muestra la función secante, que se denota sec, y se define: $\sec : x \mapsto f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$; $\cos(x) \neq 0$. Esta razón trigonométrica es inversa al coseno. Analicemos su tabla de valores y gráfica dentro del período indicado. (0 a 360º).

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	$0º$	$30º$	$60º$	$90º$	$120º$	$150º$	$180º$	$210º$	$240º$	$270º$	$300º$	$330º$	$360º$
$f(x) = \sec(x)$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
(x, sec(x))	$\{(0,1); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\pi}{3}, 2\right); \left(\frac{\pi}{2}, \text{N.D.}\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -2\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right); (\pi, -1); \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -2\right); \left(\frac{3\pi}{2}, \text{N.D}\right); \left(\frac{5\pi}{3}, 2\right); \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right); (2\pi, 1)\}$												

■ Tabla 13.



■ Fig. 14.

Análisis de la función secante en el en el intervalo $[0, 2\pi]$

Sec: $x \mapsto f(x) = \sec(x)$
Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Recorrido: $\mathbb{R}$-]-1, 1[
No corta al eje X
Corta al eje Y en el punto $(0, 1)$
Es una función continua en los reales salvo en los punto en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al eje y
Presenta asíntotas en los puntos $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, ...
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximos relativos: $x = \pi$
Mínimos relativos: $x = 0$ y $x = 2\pi$

■ Tabla 14.

Características de crecimiento, decrecimiento y concavidad de la función

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	crece de 1 a $+\infty$	Cóncava hacia arriba
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	crece de $-\infty$ a 1	Cóncava hacia abajo
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	decrece de -1 a $-\infty$	Cóncava hacia abajo
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	decrece de $+\infty$ a 1	Cóncava hacia arriba

■ Tabla 15.

2.6. Gráfica de la curva trigonométrica cotangente

Es la función trigonométrica inversa a la tangente se denota con cot y se define: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$; $\text{sen}(x) \neq 0$. Observemos las características que presenta en relación a su representación gráfica y a su tabla de valores durante el periodo designado.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \cot(x)$	N.D	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D
$(x, \cot(x))$	$\{(0, N.D); \left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3}\right); (\pi, N.D); \left(\frac{7\pi}{6}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, -\sqrt{3}\right); (2\pi, N.D)\}$												

Tabla 16.

Análisis de la función cotangente en el en el intervalo $[0, 2\pi]$

$\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$
Dominio: $\mathbb{R}$- $\{k\pi\}$, con $k \in Z$
Recorrido: $\mathbb{R}$
No corta al eje Y
Corta al eje X en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
Es una función continua en los reales salvo en los puntos en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al eje origen.
Presenta asíntotas en los puntos $(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
No es una función inyectiva
No es una función sobreyectiva
No tienen máximos ni mínimos relativos
Es estrictamente decreciente en todo su dominio.

Tabla 17.

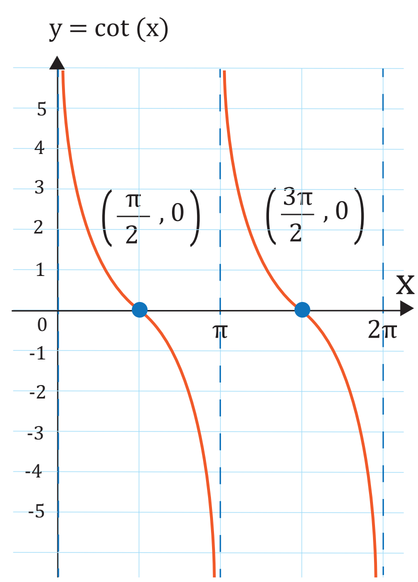


Fig. 15.

Actividades

6. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, cuatro periodos de la función $\csc : x \mapsto f(x) = \csc(x)$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.

7. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\tan : x \mapsto f(x) = \tan x$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

8. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, tres periodos de la función $f(x) = \sec x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.

9. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

2.7 Relación gráfica de las funciones seno y cosecante

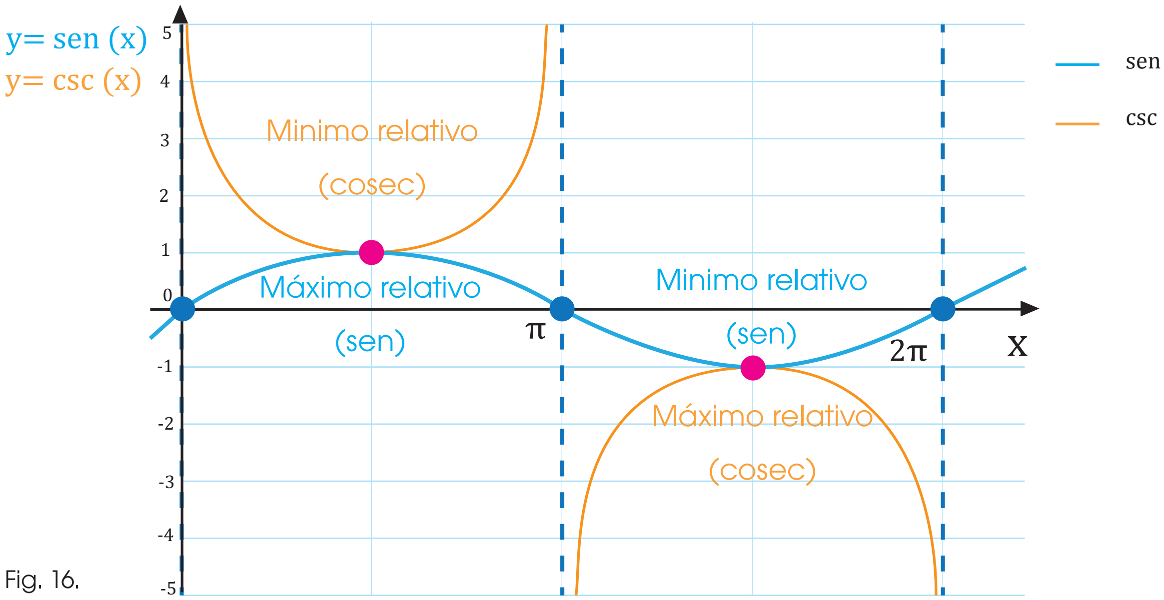


Fig. 16.

2.8. Comparación de las características de las funciones seno y cosecante

	Seno	Cosecante
Dominio	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} - \{ n.\pi \}$, con $n \in Z$
Recorrido	$y \in [-1, 1]$	$y \in \mathbb{R} -]1, -1[$
Intersección eje X	$(0,0)$; $(\pi,0)$; $(2\pi,0)$	No
Intersección eje Y	$(0, 0)$	No
Continuidad	Sí es continua	Sí es continua a excepción de los puntos en los que no está definida.
Simetría	Respecto al origen	Respecto al origen
Asíntotas	No	$(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
Inyectividad	No	No
Sobreyectividad	No	No
Máximo relativo	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
Mínimo relativo	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
Intervalos de crecimiento	$x \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$	$x \in [\pi/2, \pi[\cup]\pi, 3\pi/2]$
Intervalos de decrecimiento	$x \in]\pi/2, 3\pi/2[$	$x \in]0, \pi/2[\cup] 3\pi/2, 2\pi[$
Cóncava hacia arriba	$(\pi, 2\pi)$	$(0,\pi)$
Cóncava hacia abajo	$(0,\pi)$	$(\pi, 2\pi)$

Tabla 18.

2.9. Comparación grafica de las funciones coseno y secante

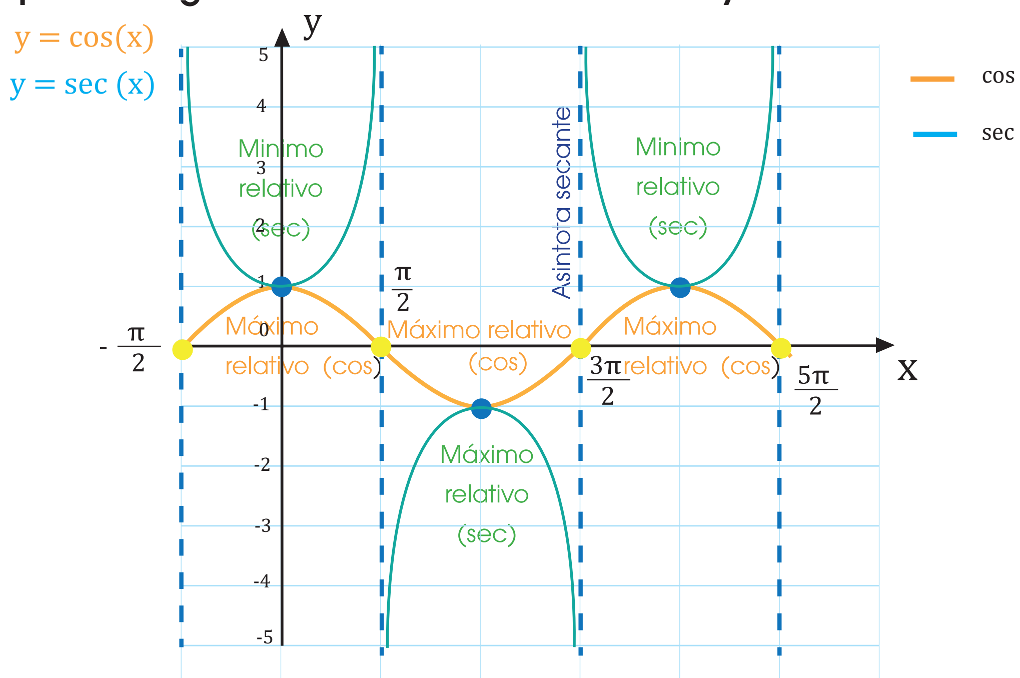


Fig. 17.

2.10. Comparación de las características de las funciones coseno y secante

	Coseno	Secante
Dominio	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$ - $\{\pi/2 + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$
Recorrido	$y \in [-1, 1]$	$y \in \mathbb{R}$ $-]1, -1[$
Intersección eje X	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$	No
Intersección eje Y	$(0, 1)$	$(0, 1)$
Continuidad	Sí es continua	Sí es continua a excepción de los puntos en los que no está definida.
Simetría	Respecto al eje y	Respecto al eje Y
Asíntotas	No	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, ...
Inyectividad	No	No
Sobreyectividad	No	No
Máximo relativo	$(0, 1)$ y $(2\pi, 1)$	$(\pi, -1)$
Mínimo relativo	$(\pi, -1)$	$(0, 1)$ y $(2\pi, 1)$
Intervalos de Crecimiento	$x \in [-\pi/2, 0] \cup [\pi, 2\pi]$	$x \in [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi] \cup [2\pi, 5\pi/2[$
Intervalos de Decrecimiento	$x \in]0, \pi[\cup]2\pi, 5\pi/2]$	$x \in]-\pi/2, 0[\cup]\pi, 3\pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi[$
Cóncava hacia arriba	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$
Cóncava hacia abajo	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Tabla 19.

2.11 Comparación grafica de las funciones tangente y cotangente

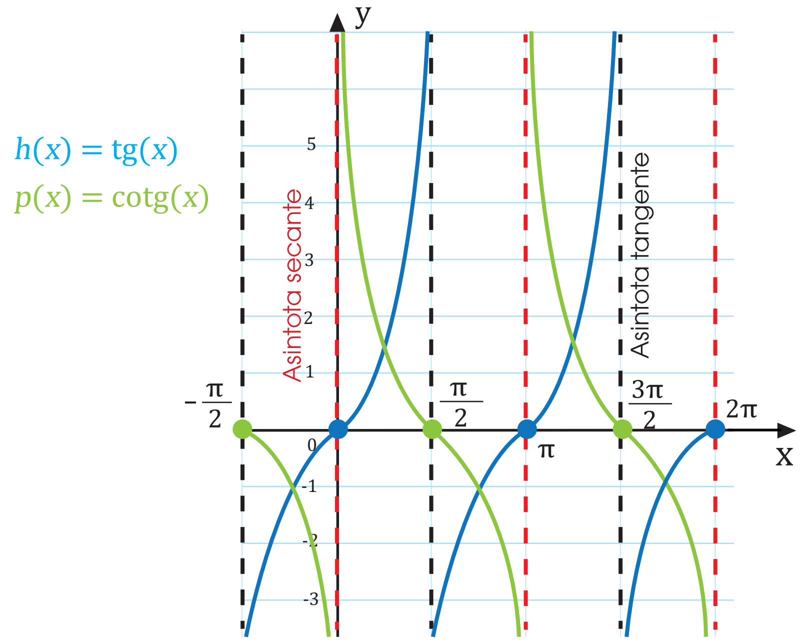


Fig. 18.

2.12 Comparación de las características de las funciones tangente y cotangente

	Tangente	Cotangente
Dominio	$\mathbb{R} - \{\pi/2+k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ - { n.π }, con $n \in Z$
Recorrido	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Intersección eje X	(0,0); (π,0); (2π,0)	
Intersección eje Y	(0, 0)	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ No
Continuidad	Si es continua a excepción de los puntos en los que no está definida	Si es continua a excepción de los puntos en los que no está definida
Simetría	Respecto al origen	Respecto al origen
Asíntotas		(0, 0); (π, 0) y (2π, 0)
Inyectividad	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ No	No
Sobreyectividad	No	No
Máximo relativo	No	No
Mínimo relativo	No	No
Intervalos de Crecimiento	Creciente en todo su dominio	No
Intervalos de Decrecimiento	No	Decreciente en todo su dominio
Cóncava hacia arriba	x ∈ [0, π/2[∪ [π, 3π/2[	x ∈]0, π/2] ∪]π/2, 3π/2]
Cóncava hacia abajo	x ∈]-π/2, 0[U]-π/2, π[U]3π/2, 2π]	x ∈ [-π/2, 0[U[-π/2, π[U]3π/2, 2π[
Puntos de inflexión	(0, 0); (π, 0); (2π, 0)	(-π/2, 0); (π/2, 0); (3π/2, 0)

Tabla 20.

3. USO DE LAS TIC PARA GRAFICAR FUNCIONES (CALCULADORA GRÁFICA DESMOS)

Es un *software* gratuito en línea, mediante el cual es posible realizar diversas representaciones gráficas de varias tipos de funciones.

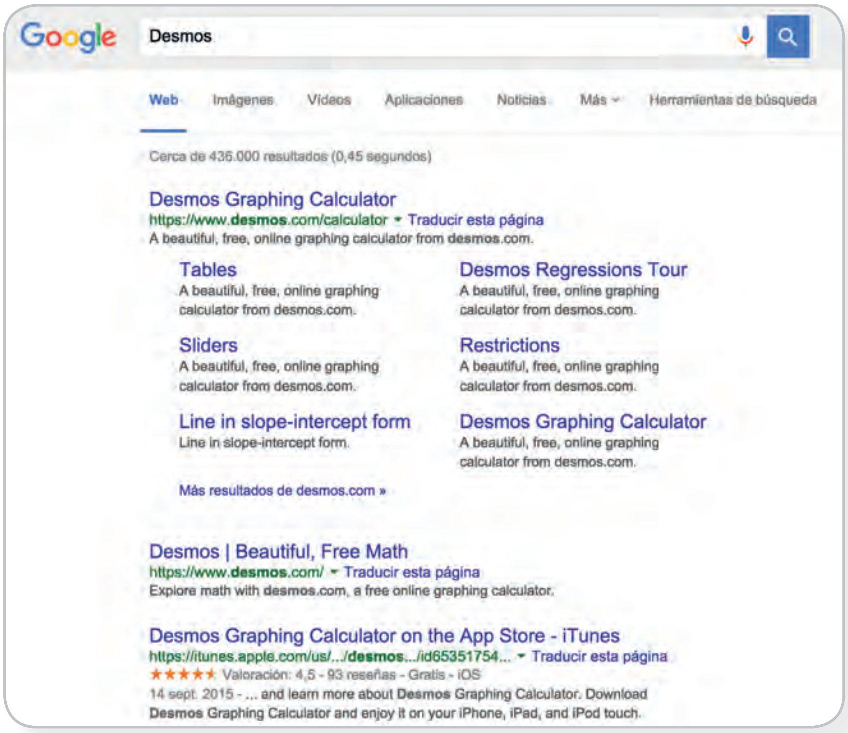
Entre las características de las funciones, presenta las intersecciones en los ejes horizontal y vertical (acercando el cursor sobre el punto de interés y haciendo clic sobre el mismo), además es posible convertir la función en la tabla de valores correspondiente. A continuación explicamos la manera de utilizarlo:

A continuación realizaremos la gráfica de la función seno.

1. **Ingresa** a google:

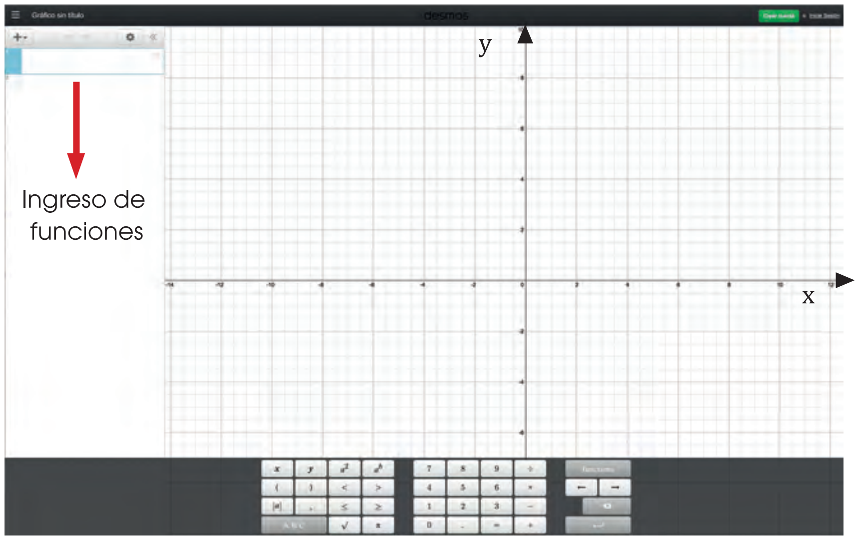
   https://www.google.com.ec/

2. **Escribe** «Desmos».



3. **Selecciona** Desmos Graphing Calculator haciendo un clic.

4. Luego de dar doble clic, aparecerá una pantalla como esta.



5. Como ejemplo, representaremos la función:

$f : x \mapsto f(x) = x^2 + 4x + 3$, digitando en la pantalla de ingreso de funciones: $y = x^2 + 4x + 3$.

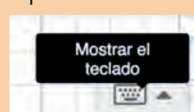
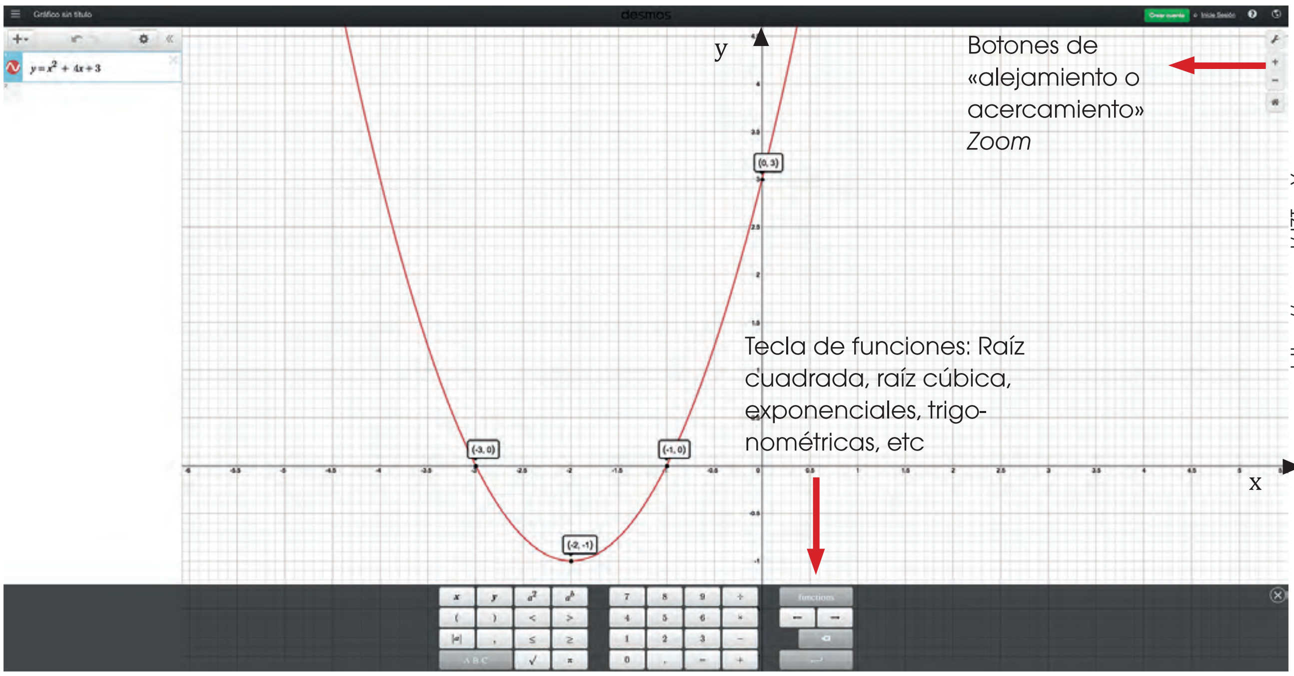
$y = x^2 + 4x + 3$	**Presentación de la gráfica**
a. **Digita** $y = x$.	
b. **Activa** el teclado ubicado en la esquina inferior izquierda, haciendo clic en el botón. 	
c. Clic en la tecla  para obtener el exponente 2.	
d. Continúa digitando el resto de la función. $+ 4x + 3$	
e. Luego de terminar de ingresar la función, aparecerá la gráfica en la «pantalla de presentación de gráficas». Finalmente, para visualizar las intersecciones solo debemos acercar el cursor a los ejes horizontal y vertical, y luego, dar un clic. Aparecerán las intersecciones en forma de un par ordenado.	

Tabla 21.

Gráfica de la función $y: x \mapsto y = x^2 + 4x + 3$, en la que se visualiza: las coordenadas de las intersecciones con los ejes y el vértice.



https://goo.gl/JZTgcY

Actividades

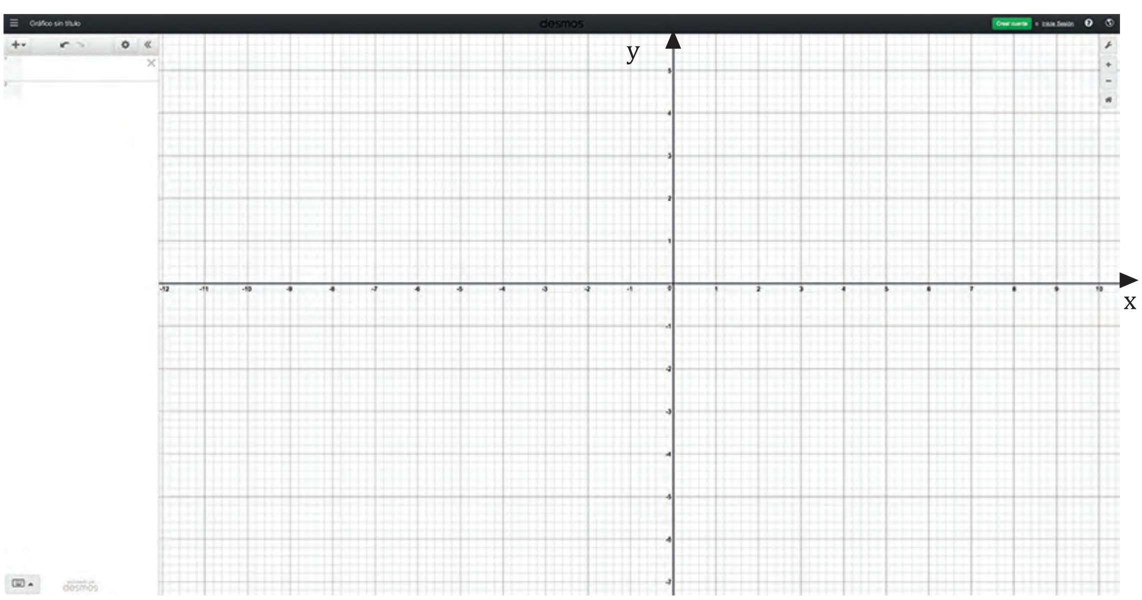
10. Utilizando la herramienta Desmos, **determina** la gráfica de las siguientes funciones, mostrando las intersecciones con los ejes.

a. $f: x \mapsto f(x) = x^2 - x - 6$

b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen } x + 4$

https://goo.gl/JZTgcY



3.1. Transformaciones e interpretación de funciones

Las representaciones gráficas de las curvas trigonométricas, se ven modificadas cuando la variable se ve relacionada con alguna operación; esta correlación se interpreta mediante: traslaciones (verticales u horizontales), reflexiones (eje horizontal o eje vertical), compresión o alargamiento de las funciones con respecto a la representación original en su forma básica, es decir sin relacionar las funciones con ninguna alteración.

Definición de una curva trigonométrica

Las funciones trigonométricas seno y coseno pueden expresarse de la siguiente forma:

$y = p\,\text{sen}(qx - r) + s$ y $y = p\,\text{sen}(qx - r) + s$

Donde p, q, r y s son constantes y las variables p y q no pueden tomar el valor de 0.

Traslaciones

Las traslaciones de las funciones trigonométricas, se evidencian considerando la variable s, si la variable s, se relaciona con la operación suma, este aumento se interpreta con una traslación vertical en el eje de las ordenadas (eje y), si se tiene:

$y = p\,sen(qx + r) + s \longrightarrow$ la gráfica se traslada hacia arriba de su posición original.

$y = p\,sen(qx + r) - s \longrightarrow$ la gráfica se traslada hacia abajo de su posición original.

Observemos las siguientes gráficas.

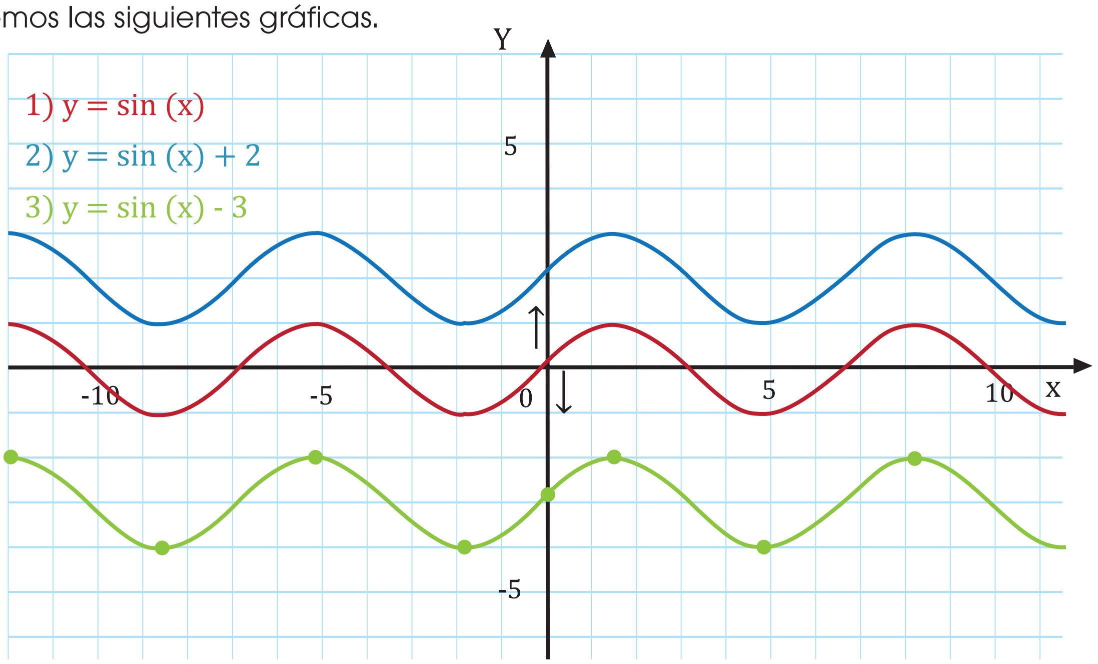


Fig. 19.

Como se observa, la función: $y : x \mapsto y = \text{sen}\,x + 2$, se traslada dos unidades hacia arriba, así como $y : x \mapsto y = \text{sen}\,x - 3$ se traslada tres unidades hacia abajo, ambas funciones con respecto a la función básica $y : x \mapsto y = \text{sen}\,x - 3$.

En cambio, las traslaciones horizontales se relacionan, con el signo de la variable r, con una traslación en el eje de las abscisas (eje x), si se tiene:

$y = p\,\text{sen}(qx + r) \longrightarrow$ la gráfica se traslada hacia la izquierda de su posición original.

$y = p\,\text{sen}(qx - r) \longrightarrow$ la gráfica se traslada hacia la derecha de su posición original.

Y TAMBIÉN: ¿?

Los signos + y - , que llamaremos signos internos, por el hecho de encontrarse dentro del paréntesis, se deben cambiar para recorrer la distancia según la constante (número) que se indica.

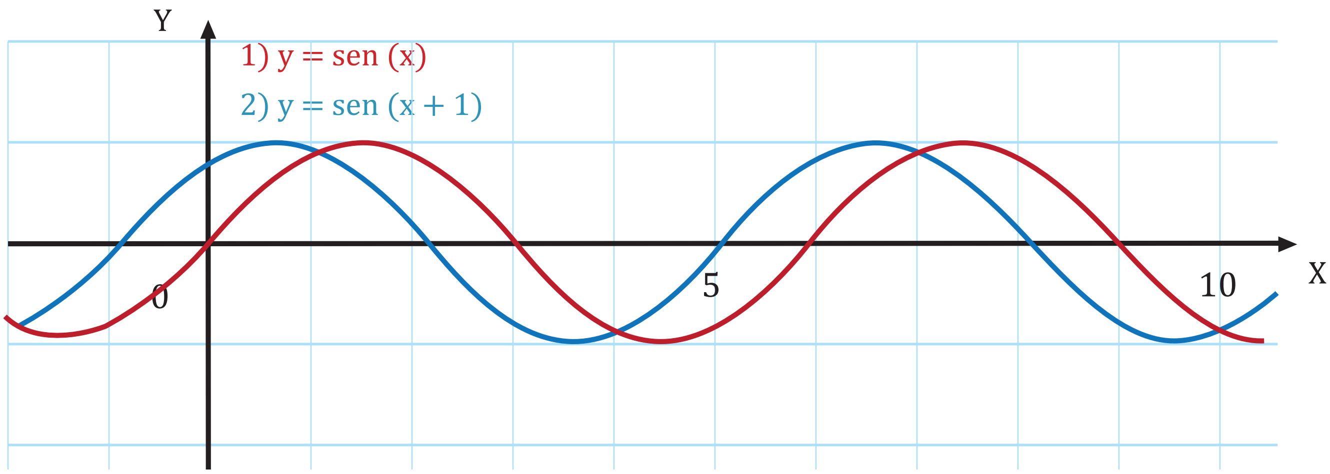


Fig. 20.

En la función $y : x \mapsto y = \sin(x + 1)$, se mueve una unidad a la izquierda con respecto a la función $y = \text{sen}(x)$.

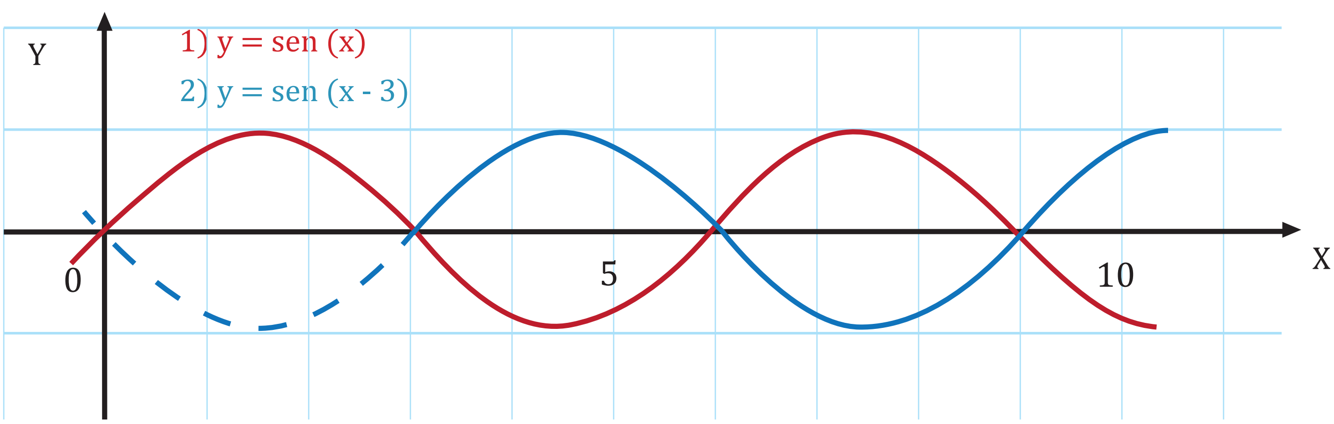


Fig. 21.

En la función $y : x \mapsto y = \text{sen}\ (x - 3)$, se mueve tres unidades a la derecha con respecto a la función $y = \text{sen}\ (x)$.

Actividades

11. **Grafica**, en papel milimetrado, las funciones básica de $y : x \mapsto y = \cos\ (x)$, además de las funciones $y : x \mapsto y = \cos x + 3$ y $y : x \mapsto y = \cos x - 2$, explicando las traslaciones.

12. **Grafica**, en papel milimetrado, las funciones básica de $y : x \mapsto y = \sin\ (x)$, además de las funciones $y : x \mapsto y = \text{sen}\ (x + 4)$ y $y : x \mapsto y = \text{sen}\ (x - 5)$, explicando las traslaciones.

Reflexiones

La trasformación en reflejo se la puede intuir mediante la «colocación imaginaria» de un espejo sobre los ejes.

Así:

Caso 1: Cuando se incluye un signo negativo antes de la función.

$y: x \mapsto y = -\text{sen}\ (x) \longrightarrow$ la gráfica se refleja sobre el eje x.

Observemos la gráfica:

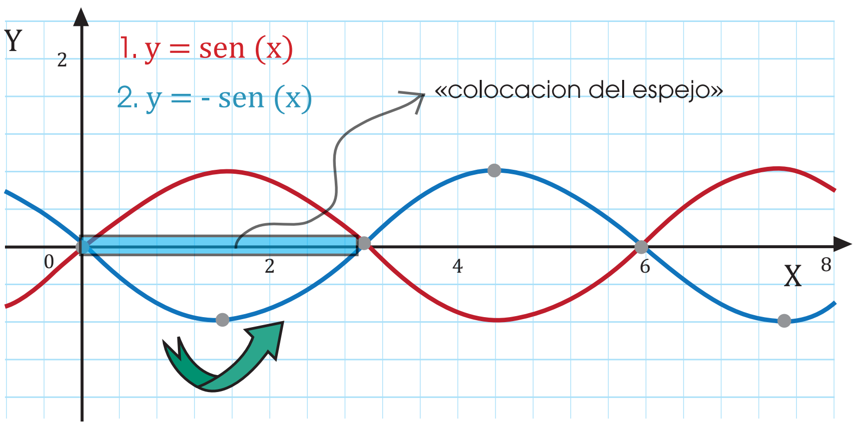


Fig. 22.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = -\text{sen}\ x$, se refleja sobre el eje horizontal (x).

Caso 2: Cuando se incluye un signo negativo antes del ángulo x.

$y: x \mapsto y = \text{sen}\ (-x) \longrightarrow$ la gráfica se refleja sobre el eje y.

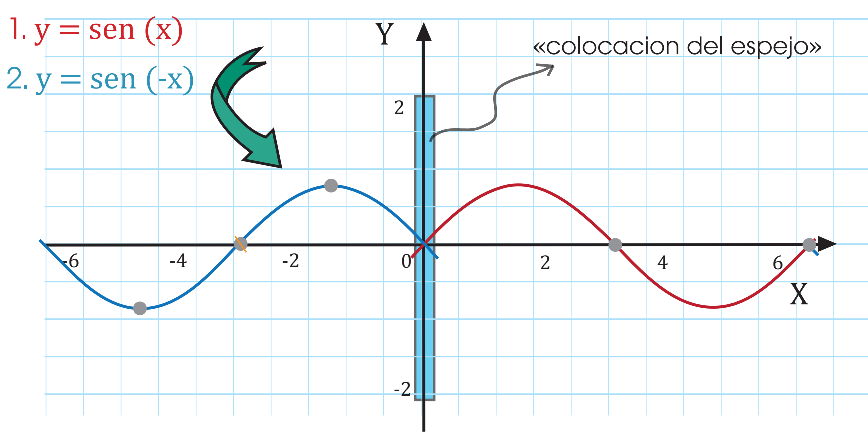


Fig. 23.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = \text{sen}\ (-x)$, se refleja sobre el eje vertical (y).

Actividades

13. **Analiza** gráficamente las reflexiones en los ejes de coordenadas de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

Estiramientos y compresiones verticales

Los estiramientos se caracterizan con el producto de un número con la variable p.

Caso 1: Cuando se multiplica por un número mayor que 1.

$y = p \text{ sen } (x) \longrightarrow$ la gráfica se estira con respecto a los puntos de referencia hacia arriba y abajo con respecto a los nodos de la función básica, el número de veces que indica la constante.

Observemos la gráfica.

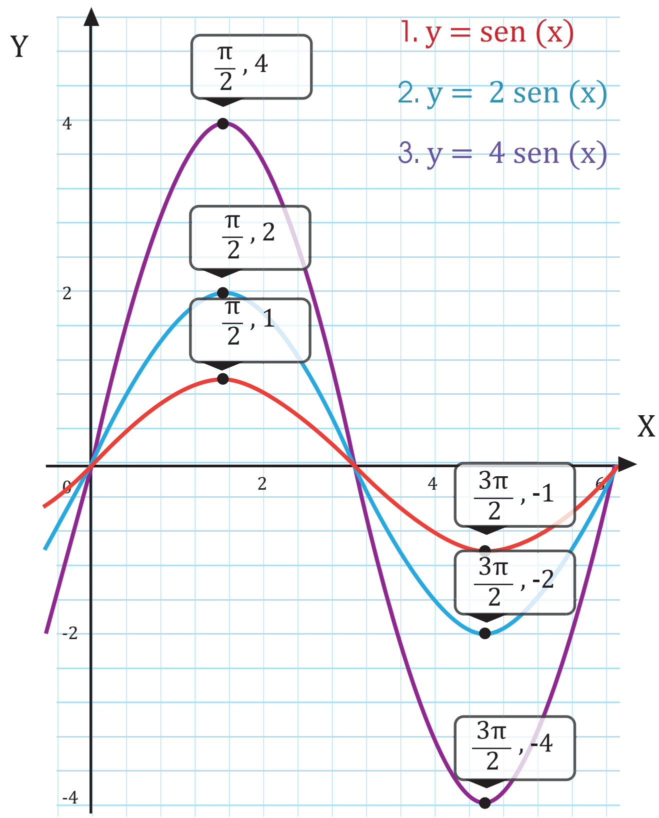


Fig. 24.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = 2 \text{ sen } (x)$ se estira dos unidades hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica de $y = \text{sen } (x)$.

Además, de igual manera, la función: $y: x \mapsto y = 4 \text{ sen } (x)$ se estira cuatro unidades hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica $y: x \mapsto y = \text{sen } (x)$.

Actividades

14. **Analiza** gráficamente los estiramientos y alargamientos en los ejes de coordenadas de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

15. **Analiza** lo que debería suceder con los estiramientos y alargamientos en los ejes de coordenadas de las funciones: $y: x \mapsto y = -2\cos(x)$ y con $y: x \mapsto y = -5 \cos (x)$.

Las compresiones verticales se caracterizan con el producto entre un número fraccionario y la variable p.

Caso 2: Cuando se multiplica por un número mayor que cero y menor que la unidad.

$y = \frac{1}{2}\ p \text{ sen } (x) \longrightarrow$ la gráfica se comprime con respecto a los puntos de referencia hacia arriba y abajo con respecto a los nodos de la función básica, el número de unidades que indica el denominador.

Observemos la gráfica.

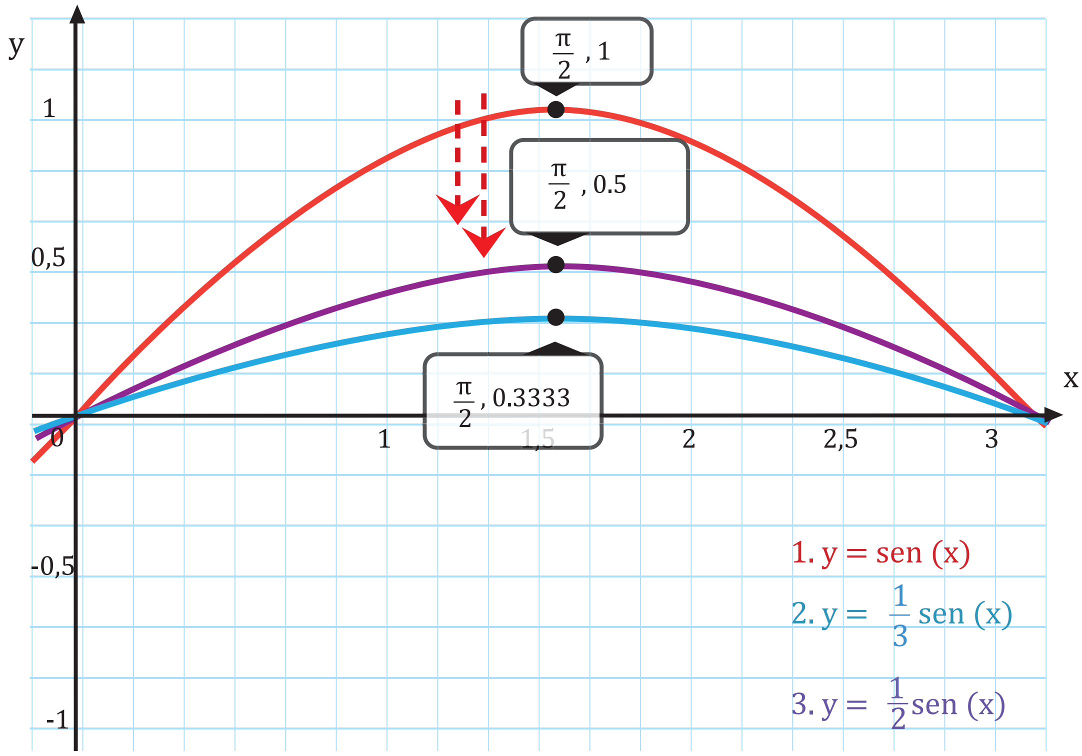


Fig. 25.

Como podemos observar, la funciones: $y: x \mapsto y = \frac{1}{2}\ \text{sen } (x)$, $y: x \mapsto y = \frac{1}{3}\ \text{sen } (x)$ se comprimen dos y tres unidades respectivamente, hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica de $y: x \mapsto y = \text{sen } (x)$.

Actividades

16. **Dibuja**, en papel milimetrado, las compresiones verticales de la función $y: x \mapsto y = \cos (x)$.

17. **Analiza** lo que debería suceder con las compresiones en los ejes de coordenadas de las funciones:
$y: x \mapsto y = -\frac{1}{5} \cos(x)$ y con $y: x \mapsto y = -\frac{1}{2} \cos (x)$.

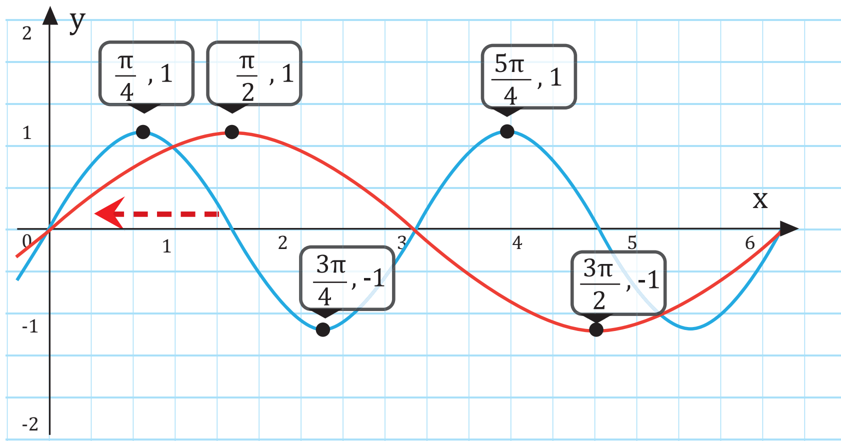
Estiramientos y compresiones horizontales

Los estiramientos horizontales se caracterizan con el producto de un número con la variable del ángulo (x).

Caso 1: Cuando se multiplica por un número mayor que 1.

$y = p \operatorname{sen}(x) \longrightarrow$ la gráfica se comprime horizontalmente, con respecto a los puntos de referencia, hacia la izquierda el recíproco número de veces que indica la constante con respecto a los nodos de la función básica (la gráfica se hace más pequeña).

Observemos la gráfica.



Como podemos observar, la función $y = \operatorname{sen}(2x)$, se comprime el recíproco de dos, es decir la mitad de veces, hacia la izquierda con respecto a los nodos referenciales de la función básica de $y = \operatorname{sen}(x)$.

Fig. 26.

Caso 2: Cuando se multiplica por un número mayor que 0 y menor que uno (número fraccionario).

$y=1/d\ p \operatorname{sen}(x) \longrightarrow$ la gráfica se estira horizontalmente, con respecto a los puntos de referencia, hacia la derecha el recíproco número de veces que indica la constante con respecto a los nodos de la función básica (la gráfica se hace más grande).

Así tenemos la gráfica:

Notamos que $y: x \mapsto y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$, se estira horizontalmente el recíproco de $\frac{1}{2}$, es decir la dos veces, con respecto a los nodos de la función básica de $y: x \mapsto y = \operatorname{sen}(x)$.

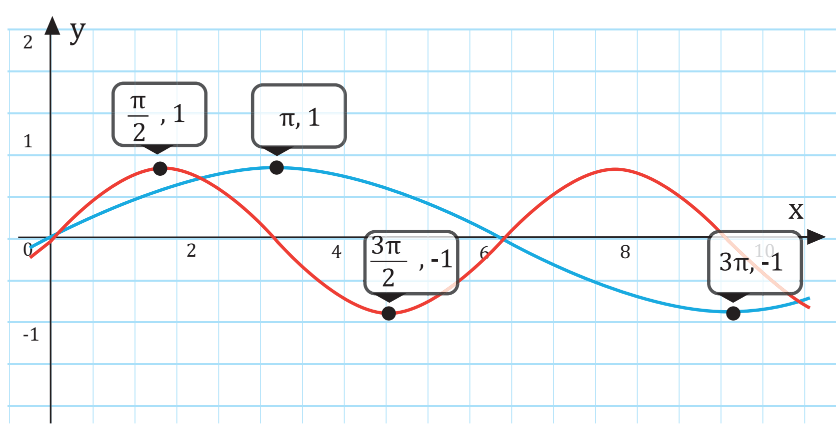


Fig. 27.

Actividades

18. **Dibuja** en papel milimetrado las compresiones y estiramientos horizontales de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

2 Resumen

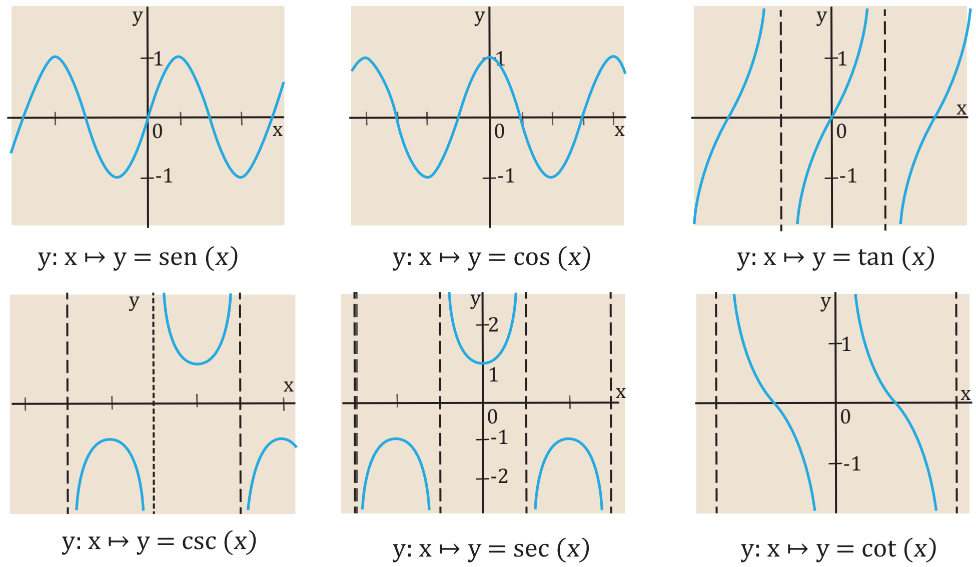


Fig. 28.

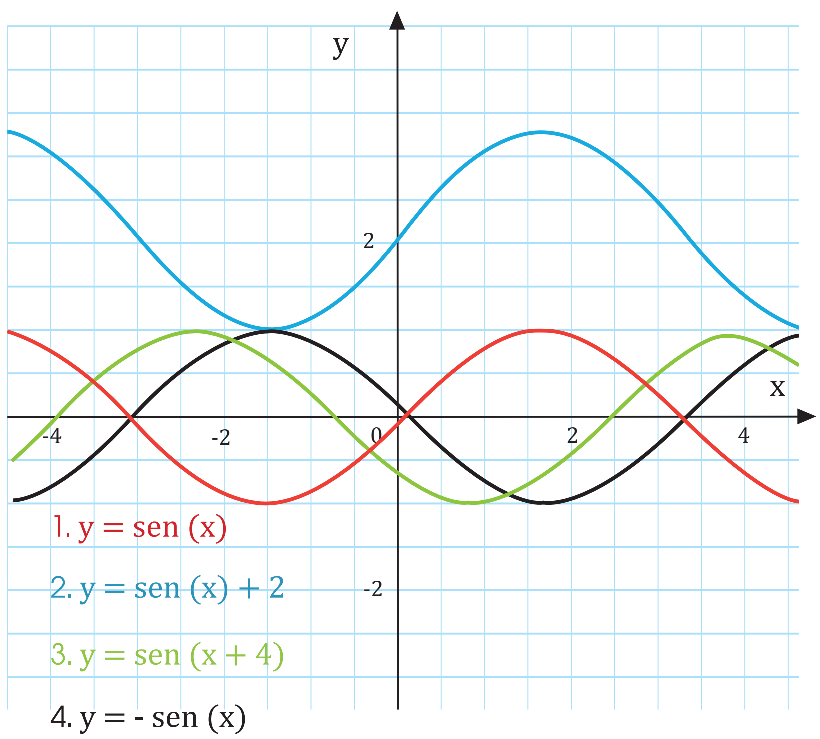


Fig. 29.

Transformaciones		
(rojo)	$y = \text{sen}(x)$	**Función básica**
(azul)	$y = \text{sen}(x) + 2$	Traslación vertical
(verde)	$y = \text{sen}(x + 4)$	Traslación horizontal
(negro)	$y = -\text{sen}(x)$	Reflejo

Tabla 22.

Problemas resueltos

A

1. **Expresa** en forma incompleja de segundos 86⁰ 45´52´´

Solución

$$86° = 86° \cdot \frac{3600''}{1°} = 309\,600''$$

$$45' = 45' \cdot \frac{60''}{1'} = 2700''$$

$$52''$$

$$312\,352''$$

2. **Expresa** los siguientes ángulos en grados.

Solución

a. 6π rad $\quad 6\pi \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{rad}}$ Simplificando $1080°$

b. $\frac{4}{3}\pi$ rad $\quad \frac{4}{3}\pi \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{rad}}$ Simplificando $240°$

3. **Expresa** los siguientes ángulos en radianes.

Solución

$$86° = 86° \cdot \frac{3600''}{1°} = 309600''$$

$$45' = 45' \cdot \frac{60''}{1'} = 2700''$$

$$52''$$

$$312352''$$

4. **Expresa** los siguientes ángulos en grados.

Solución

a. 6π rad $\quad 6\pi \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{rad}}$ Simplificando $1080°$

b. $\frac{4}{3}\pi$ rad $\quad \frac{4}{3}\pi \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{rad}}$ Simplificando $240°$

5. Dada la siguiente gráfica, **escribe** y **explica** las transformaciones de la función básica $y: x \mapsto f(x) = \text{sen } x$.

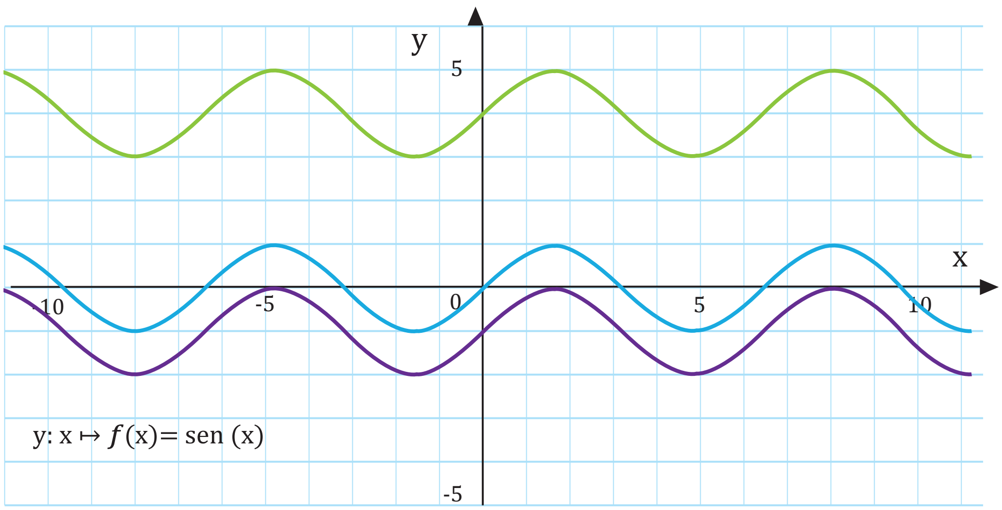


Fig. 30.

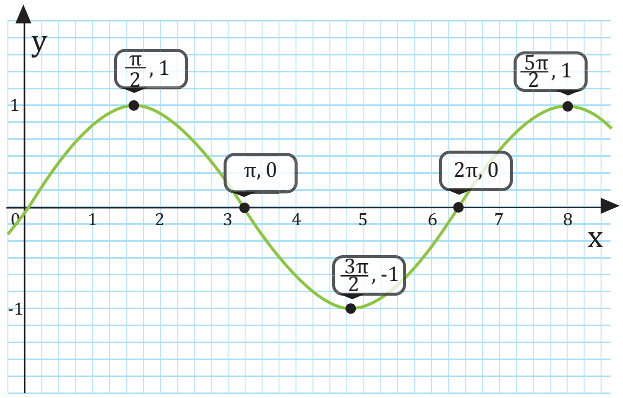
Función básica : $f(x) = \text{sen } (x)$
Función desplazada : $f(x) = \text{sen } (x) + 4$
La gráfica se desplaza 4 unidades hacia arriba.

Función desplazada : $f(x) = \text{sen } (x) - 2$
La gráfica se desplaza 2 unidades hacia abajo

Ejercicios y problemas

1 Funciones Trigonométricas

1. **Observa** la siguiente gráfica.



- **Responde** las preguntas.

a. **Escribe** la función que representa la gráfica.

b. **Escribe** el dominio de la función así como el recorrido.

c. **Escribe** las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

d. **Escribe** los máximos y mínimos que se observan.

e. **Escribe** los intervalos donde la función es creciente.

f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente.

2. **Elabora** una tabla de valores de x con intervalos de $\frac{\pi}{9}$ desde 0 a 2π.

- Para representar $f(x) = \tan(x)$

3. **Elabora** una tabla de valores de x con intervalos de $\frac{\pi}{6}$ desde 0 a 4π.

- Para representar $f(x) = \text{sen}(x)$

4. Considerando la siguiente tabla.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0 º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
$f(x) = \sec x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

- **Realiza** la representación gráfica y **responde** las siguientes preguntas.

a. **Escribe** la función que representa la gráfica.

b. **Escribe** el dominio y recorrido de la función.

c. **Escribe** las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

d. **Escribe** los máximos y mínimos que se observan.

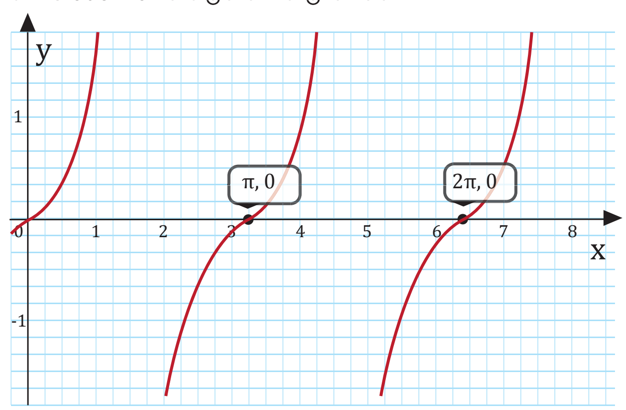
e. **Escribe** los intervalos donde la función es creciente.

f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente

g. **Escribe** si la gráfica tiene asíntotas. **Explica.**

5. **Grafica** las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $f(x) = \cos(x)$, utilizando el graficador Desmos.

6. **Observa** la siguiente gráfica.



- **Responde** las preguntas

a. **Escribe** la función que representa la gráfica.

b. **Escribe** el dominio de la función así como el recorrido.

c. **Escribe** las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

d. **Escribe** los máximos y mínimos que se observan.

e. **Escribe** los intervalos donde la función es creciente.

f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente

7. **Reduce** los siguientes ángulos a grados.

a. 53° 36' 42"

b. 12° 6' 50"

c. 3° 12' 22"

d. 89° 40'

e. 125° 42"

f. 12° 32' 5"

8. **Expresa** los siguientes medidas de grados en radianes.

a. 120°

b. 12,25°

c. 110°

d. 150°

e. 125° 42"

f. 12° 32' 5"

11. **Grafica** el siguiente par de funciones y **establece** dos observaciones con respecto a la comparación de las mismas.

a. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen } x;\ \ f: x \mapsto f(x) = \text{sen } (x + 4)$

b. $f: x \mapsto f(x) = \cos x;\ \ f: x \mapsto f(x) = \cos (x - 3)$

c. $f: x \mapsto f(x) = \csc x;\ \ f: x \mapsto f(x) = \csc (x - 5)$

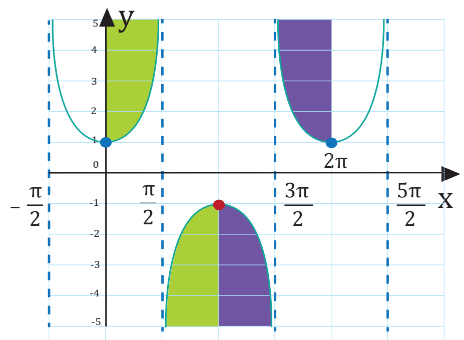
d. $f: x \mapsto f(x) = \tan x;\ f: x \mapsto f(x) = 2 \tan (x + 1)$

e. $f: x \mapsto f(x) = \sec x;\ \ f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{4} \sec (x + 2)$

f. $f: x \mapsto f(x) = \cos x;\ f: x \mapsto f(x) = -\cos (x + 2)$

g. $f: x \mapsto f(x) = \text{ctg } x;\ f: x \mapsto f(x) = -\cos (x + 2)$

11. **Identifica** los puntos máximos y mínimos relativos en el siguiente gráfico de la función $y = \sec (x)$.



9. **Completa** el siguiente cuadro de las características de variación de la función trigonométrica coseno.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I		Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π		Cóncava hacia arriba
III		Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de 0 a 1	

10. **Completa** el cuadro de la tabla de valores de la función trigonométrica seno.

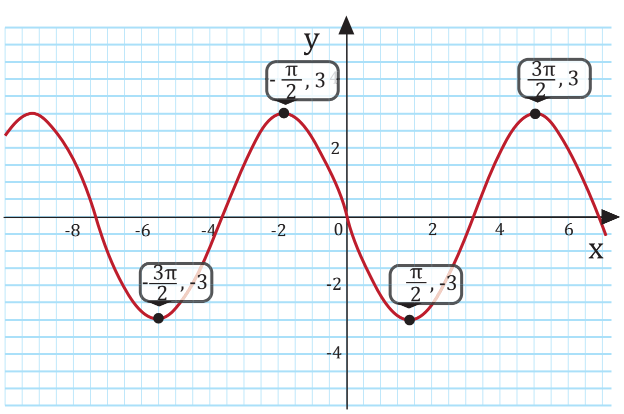
Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π			$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$		2π
Valores de X (grados)	$0°$	$30°$	$60°$		$120°$		$180°$	$210°$	$240°$		$300°$	$330°$	$360°$
$f(x) = \text{sen } x$	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1		$\frac{1}{2}$	

2 Transformaciones

14. **Responde** a las siguientes preguntas.
    a. ¿Cuántos tipos de transformaciones conoce?
    b. ¿Qué efecto genera el tipo de traslación horizontal?
    c. ¿Cómo identifica el tipo de transformación horizontal?
    d. ¿Cuántas formas de traslación horizontal pueden manifestarse?
    e. **Explica** la transformación en reflejo
    f. ¿En qué consiste la teoría del espejo?
    g. ¿Qué debe cambiar en una función para que represente una reflexión sobre el eje *x*?

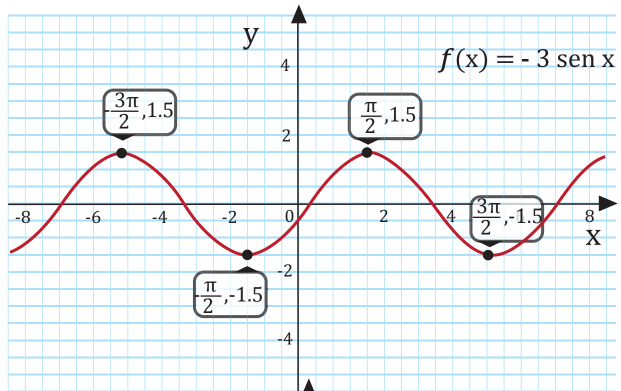
15. **Identifica** y **describe** las transformaciones que se presentan en las siguientes funciones trigonométricas.
    a. $f: x \mapsto f(x) = 3 \text{ sen } x$
    b. $f: x \mapsto f(x) = -8 \cos x$
    c. $f: x \mapsto f(x) = 0{,}25 \text{ sen } x$
    d. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen }(x + 1)$
    e. $f: x \mapsto f(x) = -0{,}5 \text{ sen }(x + 4)$
    f. $f: x \mapsto f(x) = -0{,}25 \text{ sen}(x - 5) + 3$

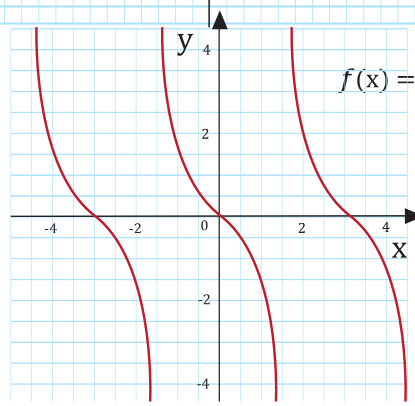
16. **Grafica** las funciones, utilizando el graficador Desmos; **identifica** el dominio y el recorrido de forma gráfica.
    a. $f(x) = -7\text{sen } x$
    b. $f(x) = \cos (x - 3)$
    c. $f(x) = \csc (x - 2) + 4$
    d. $f(x) = \frac{1}{2} \sec (x + 3)$
    e. $f(x) = -\cos (x - 2) - 2$



17. En los ejercicios anteriores, **grafica** dos periodos de las funciones, sin utilizar calculadora.

18. En los siguientes gráficos, **especifica** la amplitud de cada una de las funciones y **explica** las traslaciones que se manifiestan.





19. **Escribe** el proceso para expresar 53° 36' 42" en grados.

20. **Utiliza** el resultado obtenido en la pregunta anterior para expresarlo en radianes

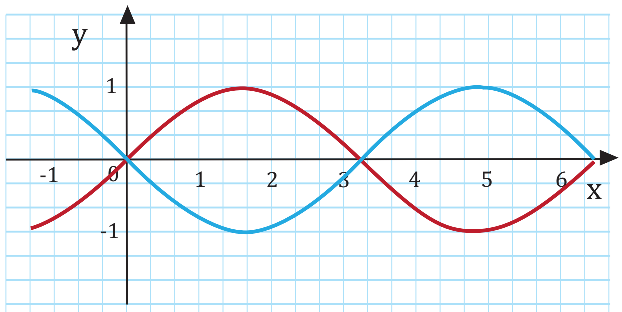
21. **Escribe** las características de la función seno.

22. **Dibuja** las funciones seno, coseno y tangente en intervalos de 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

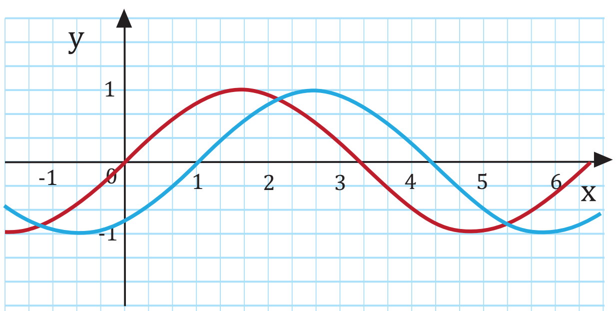
23. **Dibuja** las funciones secante, cosecante y cotangente en intervalos de 15 ° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

24. **Elabora** una tabla de doble entrada en la que compares las representaciones gráficas seno – secante, coseno- secante y tangente – cotangente.

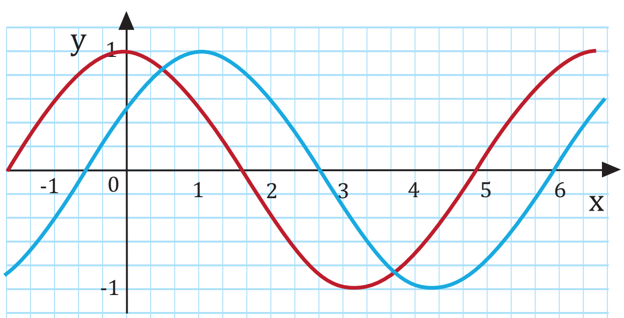
25. **Escribe** las funciones para las gráficas de color azul.



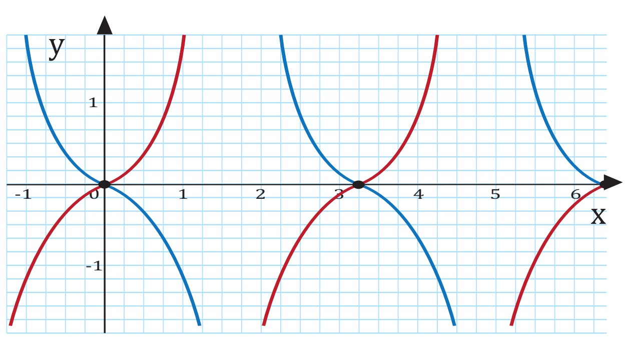
a. $f(x) =$ ....



b. $f(x) =$ ....



c. $f(x) =$ ....



d. $f(x) =$ ....

26. **Grafica** en papel milimetrado:

a. La función $f(x) = \text{sen}(x)$, en el intervalo $[0; 4\pi]$.

b. La función : $f(x) = \text{sen}(x)$, en el intervalo $[0; 6\pi]$.

c. **Identifica** en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).

27. **Utiliza** la herramienta Desmos para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función : $f(x) = \tan(x)$.

b. **Representa** la función : $f(x) = -\tan(x)$

c. **Interpreta** y **compara** lo que puede observar.

28. Utilizando la herramienta Desmos, para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función: $f(x) = \sec(x)$

b. **Representa** la función: $f(x) = \sec(x + 2)$

c. **Representa** la función: $f(x) = \sec(x - 4)$

d. **Interpreta** y **compara** lo que pudiste observar.

29. Algunas veces para obtener los términos de una sucesión se recurre a procedimientos que incluyen sucesivas operaciones más o menos complejas.

Con la ayuda de los enlaces propuestos sobre el triángulo de Pascal:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/educontinua/mate/lugares/ma2_01.htm

www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html

www.disfrutalasmatematicas.com/sierpinski-triangulo.html

Resuelve las cuestiones siguientes:

a. ¿Cómo se construye el triángulo de Pascal?

b. ¿Qué relación tiene con la sucesión de Fibonacci?

c. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?

d. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?

e. Si tomas cada fila como un número, ¿qué obtienes?

Para finalizar

1 **Analiza** las siguientes preguntas, luego **subraya** la respuesta correcta.

a. ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo que mide 30 grados?

- $\frac{\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{5}$
- $\frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{3}$

b. El valor en grados de $\frac{\pi}{2}$ es

- 45º
- 90º
- 22,5º
- 180º

c. Al expresar 53° 36' 42" en grados resulta:

- 53,36°
- 53,36°
- 53,61°
- 53,78°

d. Al interpretar la función

$f: x \mapsto f(x) = -\cos(x + 2)$

- Se mueve 2 unidades a la derecha y se refleja sobre el eje x.
- Se mueve 2 unidades hacia arriba y se refleja sobre el eje y.
- Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje x.
- Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje y.

2 **Responde** verdadero (V) o falso (F).

a. El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$

b. La función tangente es inyectiva.

c. La función secante corta el eje horizontal.

d. La función seno interseca al eje vertical en (0 ,0)

e. La función $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}(x + 6)$ es una traslación.

f. La función tangente tiene asíntotas.

g. La función $f: x \mapsto f(x) = -\cos(x)$ es una reflexión.

h. La función inversa de secante es el coseno.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

En la física

En física se estudia las características de las ondas, que se pueden interpretar como cualquier tipo de perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto.

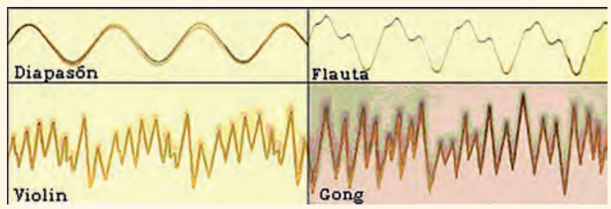
Curiosamente, la representación de las distancias de separación de la posición de equilibrio de las partículas al vibrar frente al tiempo dan una función matemática seno, que una vez representada en el papel, tiene forma de onda.

El sonido es una onda que responde a las siguientes características:

Es una onda mecánica, que no puede desplazarse en el vacío, necesitan hacerlo a través de un medio material (aire, agua, cuerpo sólido).

Además de que exista un medio material, se requiere que este sea elástico. Un medio rígido no permite la transmisión del sonido, porque no permite las vibraciones.

La propagación de la perturbación se produce por la compresión y expansión del medio por el que se propagan. La elasticidad del medio permite que cada partícula transmita la perturbación a la partícula adyacente, dando origen a un movimiento en cadena



http://goo.gl/IVBcBy

SENTIDO CRÍTICO

La radio

La radiodifusión es un conjunto de prácticas sociales, culturales, comerciales, institucionales y gubernamentales, dirigidas al público general o a un grupo de personas en particular, mediante transmisiones de mensajes, sonidos y/o imágenes enviados en ondas electromagnéticas de RF («Radio» y «Televisión» principalmente). Su función es difundir periódicamente programas destinados a informar, entretener, comunicar, promocionar, alertar, etc.

Viene de *radius*, que significa «rayo» en latín.

Las Ondas de Radio son Ondas Electromagnéticas de radiofrecuencia (RF) que transportan información.

Son emitidas por las emisoras de Radiodifusión («Broadcasting»), formadas por una onda portadora de RF, transportando una señal de audiofrecuencia (AF), que corresponde a las transmisiones «radiofónicas» (voz transportada en ondas de radio) dirigidas al público general.

Se dice que la Onda de Radio es una onda portadora de RF modulada por la señal de AF, y esta información se puede transportar modulando la amplitud A o modulando la frecuencia f de la onda portadora:

Amplitud Modulada (AM, *Amplitude Modulation*), la onda de radio tiene la frecuencia de la RF constante, y su amplitud A(t) está modulada en el tiempo t por la AF.

Frecuencia Modulada (FM, *Frequency Modulation*), donde la portadora tiene amplitud A constante y frecuencia f(t) modulada por la AF.

SI YO FUERA....

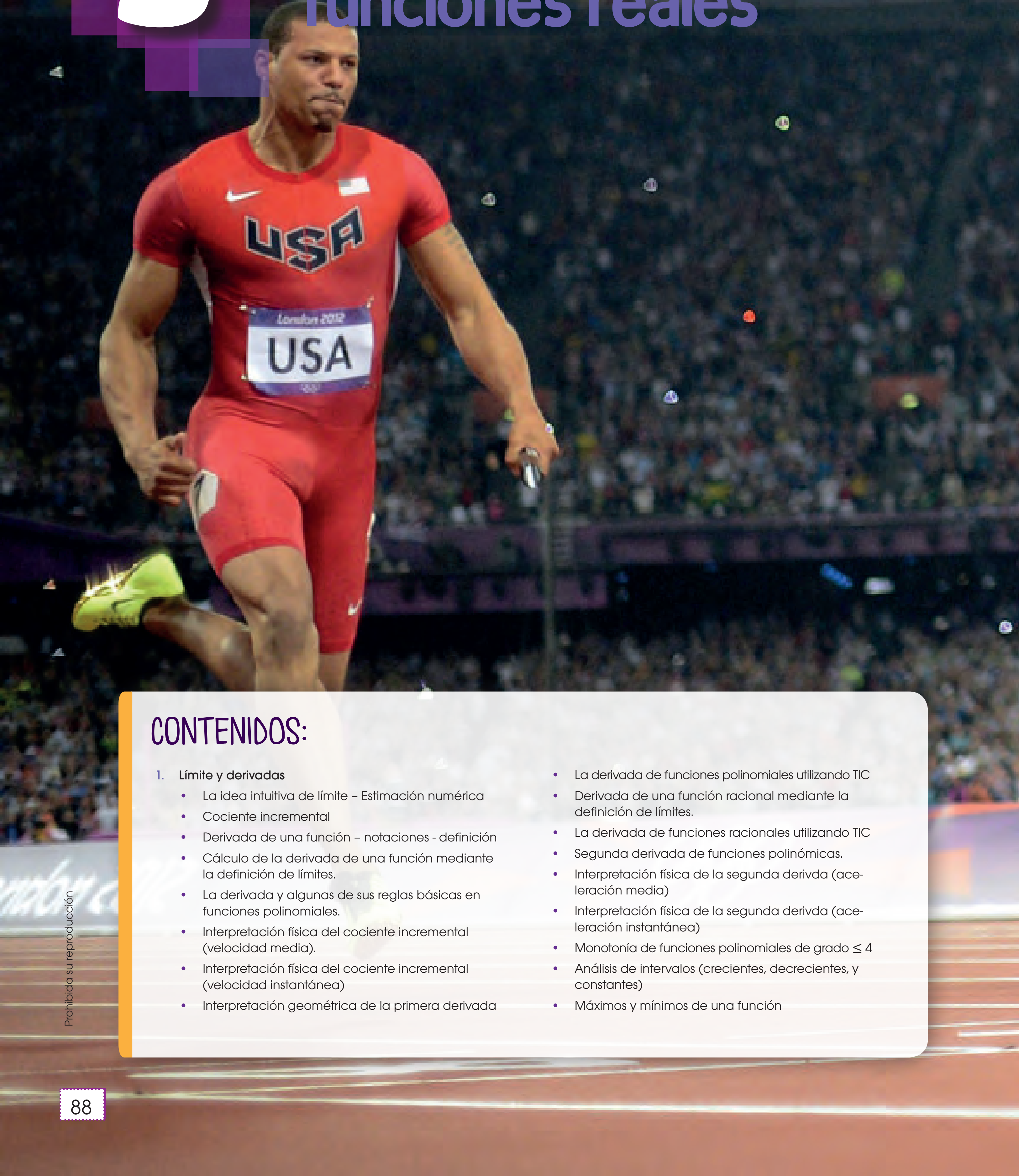


http://goo.gl/2sOXme

Ingeniero electrónico

Podría interpretar el tratamiento de las ondas de radio y televisión, optimizando en muchos casos la señal de recepción, adecuando las condiciones de emisión, mejorando la nitidez, sensibilidad y amplificación de señales, y disminuyendo el ruido o las interferencias.

3 Derivadas de funciones reales



CONTENIDOS:

1. Límite y derivadas
    - La idea intuitiva de límite – Estimación numérica
    - Cociente incremental
    - Derivada de una función – notaciones - definición
    - Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites.
    - La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales.
    - Interpretación física del cociente incremental (velocidad media).
    - Interpretación física del cociente incremental (velocidad instantánea)
    - Interpretación geométrica de la primera derivada
    - La derivada de funciones polinomiales utilizando TIC
    - Derivada de una función racional mediante la definición de límites.
    - La derivada de funciones racionales utilizando TIC
    - Segunda derivada de funciones polinómicas.
    - Interpretación física de la segunda derivda (aceleración media)
    - Interpretación física de la segunda derivda (aceleración instantánea)
    - Monotonía de funciones polinomiales de grado ≤ 4
    - Análisis de intervalos (crecientes, decrecientes, y constantes)
    - Máximos y mínimos de una función



http://goo.gl/fuH5Ql

En Internet

Una búsqueda en Google debe recorrer un gran número de páginas web, y después ordenarlas para el usuario. Para dar mayor o menor relevancia a un resultado, Google utiliza un algoritmo que cuenta la cantidad de páginas con un link al mismo. En el reporte http://bit.ly/1Gs6r3D puedes aprender más acerca del proceso.

EN CONTEXTO

En la ingeniería electrónica el paso de corriente se calcula mediante sistemas de ecuaciones, y en informática el manejo de datos se realiza mediante matrices ordenadas. En este capítulo aprenderás a utilizar estos recursos para resolver varios problemas.



http://goo.gl/PST9OC

La idea intuitiva de límite

La noción de límite constituye uno de los conceptos importantes para introducirse al estudio del cálculo.

En nuestras actividades cotidianas, figuramos la noción de límite cuando en una competición automovilística se observan vehículos a punto de colisionar, o también en una grúa cuando estamos aproximadamente cerca de exceder su capacidad de carga, se dice que el equipo de izaje se encuentra al límite de su capacidad.

Ejemplo 1

Considerando la función: $f(x) = 2x + 1$, determinemos.

a. La imagen de la función cuando $x = 2$.

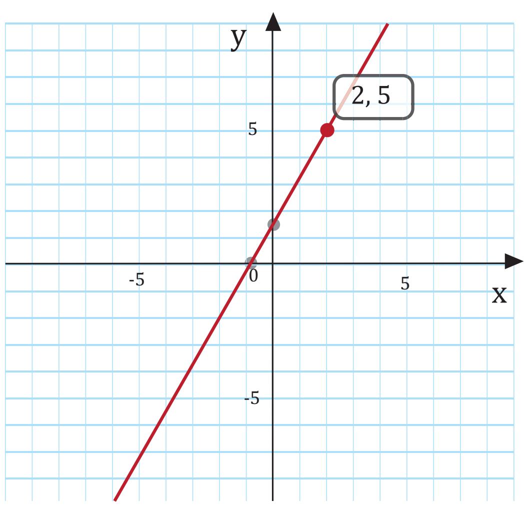
b. La imagen de la función cuando x está muy cercano (límite) a 2.

Para interpretar la situación del problema, realizamos el análisis de la tabla de valores, así como las respectivas representaciones gráficas.

a. Imagen cuando $x = 2$

Utilizamos valores enteros mayores y menores a 4.

x	...	0	1	2	3	4	...
$f(x)$	...	1	3	5	7	9	...

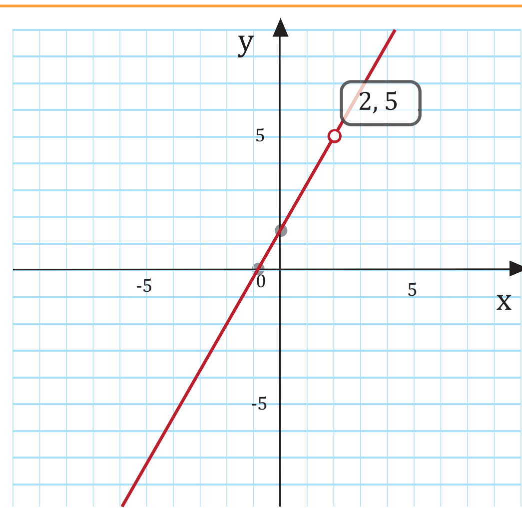


Observamos en la gráfica que cuando $x = 2$ entonces $f(x) = 5$.

b. Imagen cuando x se aproxima a 2

Utilizamos valores un tanto mayores y un tanto menores a 4.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
$f(x)$	...	5,96	5,98	5,02	5,04	5,06	...



En el punto (2, 5), se observa un «agujero» (discontinuidad), que indica que a pesar de que x no puede ser igual a 2, se acerca mucho a 2, y entonces $f(x)$ se «proyecta» o se aproxima a 5.
Utilizando límites, se denota: $\lim_{x \to 2}(2x + 1) = 5$

Tabla 1.

Estimación numérica de un límite

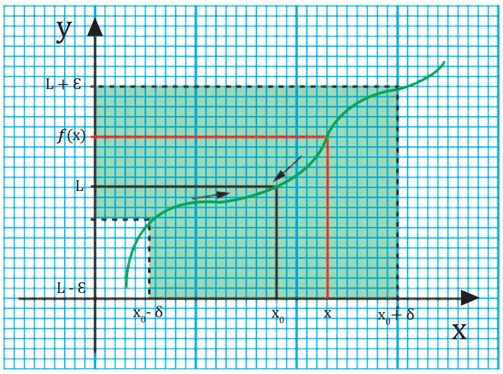


Fig. 1.

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ε, por pequeño que sea, existe un número real positivo δ, tal que para todo $x \neq x_0$, si la distancia entre x y x_0 es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo 2

Considerando la función:

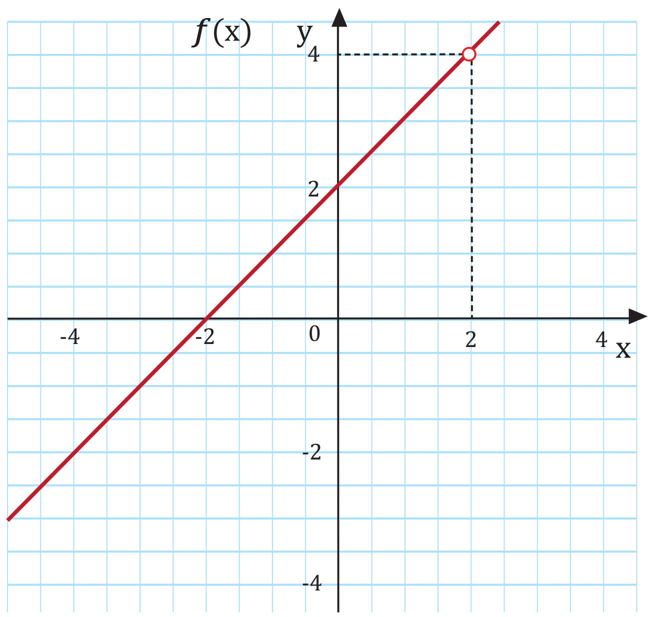
$f: x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$

Supongamos que es posible representar gráficamente la función f, pero es notable observar que cuando x = 2, la función no podría representarse, debido a que se anula el denominador.

Para observar el comportamiento de la función, generamos una tabla de valores que se aproximen a dos por la izquierda y por la derecha, es decir utilizamos valores un poco menores y un poco mayores que 2, como se ilustra en la siguiente tabla.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
$f(x)$	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...

Como es notable, el límite de la función es 4, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha.



Actividades

1. Considerando los siguientes límites, **completa** las tablas respectivas y **estima** el límite. **Compara** el resultado con la representación gráfica respectiva.

a. $\lim_{x \to 1} (x^2 + 6x)$

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

b. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 6x}{x}\right)$

x	...	-0,1	-0,001	0,001	0,1	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

c. $\lim_{x \to 4} \left(\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}\right)$

x	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

d. $\lim_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 4}\right)$

x	...	-0,99	-0,98	1,01	1,02	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

Cociente incremental

En la situación: dos personas en su automóvil se trasladan desde un punto A hasta el punto B; las siguientes gráficas muestran la distancia recorrida por los móviles.

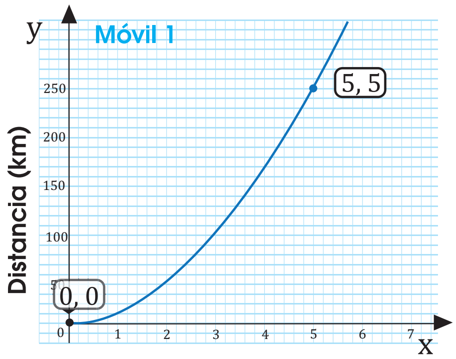


Fig. 2.

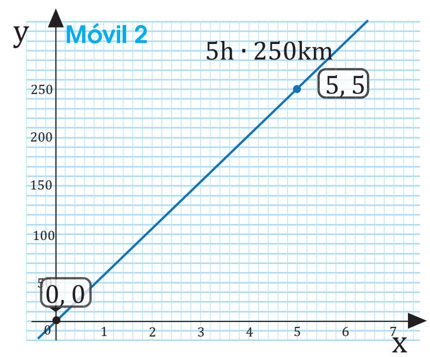


Fig. 3.

Analizando las gráficas, observamos que el tiempo invertido en el viaje y el número de kilómetros es el mismo para los dos móviles, (5 horas, 250 kilómetros). Cabe preguntar: ¿Por qué las gráficas de movimiento son diferentes?

Debido al cambio de velocidad, el móvil 1 se desplaza con velocidad variable, mientras que el móvil 2 lo hace con velocidad constante.

En el móvil 2, la velocidad coincide con la pendiente de la recta, la cual denominaremos velocidad media. Así tenemos entonces:

velocidad media $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, donde

Δy y Δx miden los cambios en los ejes respectivos

El cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es conocido como cociente incremental, el cual indica el incremento de la variable y con respecto a x.

Ejemplo 3

Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 25t^2$, donde la distancia se mide en metros, determinemos la velocidad media considerando los 4 primeros segundos de caída.

Considerando que $b= 4$ y que $a= 0$, utilizando la expresión del cociente incremental, tenemos:

$$\text{velocidad media} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{velocidad media} = \frac{25(4)^2 - 25(0)^2}{4 - 0}$$ Reemplazamos en la expresión t= 4 y t= 0 respectivamente.

$$\text{velocidad media} = \frac{25(4)^2}{4} = 100\ \frac{m}{s}$$ Resolvemos la potencia y el cociente

Derivada de una función


http://goo.gl/RO2lCx

La derivada de una función mide el cambio o la variación de una variable con respecto de otra.

Para intuir este concepto, observamos que la pendiente, o inclinación, de una carretera es la derivada de la altura respecto a la distancia horizontal.

La velocidad en módulo es la derivada de la distancia recorrida con respecto al tiempo.

Así, el odómetro de un automóvil, se lo puede interpretar como una máquina de derivar.

Definición de la derivada de una función

La derivada de $f'(x)$ de x está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al proceso de calcular la derivada de una función se denomina derivación.

Una función es derivable en x siempre y cuando su derivada en x exista, y además, también es derivable en un intervalo abierto siempre y cuando sea derivable para todos y cada uno de los elementos del conjunto determinado por el intervalo.

Una función derivable es continua pero el reciproco no se cumple.

Diferentes notaciones de la derivada de una función

Las formas más conocidas para expresar la derivada según:

Leibniz: El cociente $\frac{dy}{dx}$ se lee: «derivada de y con respecto a x». Esta notación tiene la ventaja de sugerir a la derivada de una función con respecto a otra como un cociente de diferenciales.

Lagrange: La expresión $f'(x)$ se lee «f prima de x» , es la notación más simple para diferenciación.

Euler: La expresión $D_x f$ se lee «d sub x de f».



http://goo.gl/Cl5H4y http://goo.gl/LnfXMw http://goo.gl/vMMM9l

Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites

En los procesos esenciales para obtener la derivada intervienen: productos notables, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = 8x + 5$	Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 - 3$
En cada variable x insertamos la adición de h; luego restamos la función original.	
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8(x+h) + 5 - (8x+5)}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5(x+h)^2 - 5 - (-5x - 3)}{h}$
Propiedad distributiva en los paréntesis.	Productos notables y propiedad distributiva en los paréntesis.
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8x + 8h + 5 - 8x - 5}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5x^2 - 10xh - 5h^2 - 3 + 5x^2 + 3}{h}$
Reducimos términos semejantes	
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8h}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-10xh - 5h^2}{h}$
Simplificamos h	Sacamos el factor común y simplificamos
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8\cancel{h}}{\cancel{h}}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x) = 8$	$f'(x) = -10x$

Tabla 2.

Actividades

2. Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 10t^2$, **determina** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de caída.

3. Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 3t^2 - 2$, **determina** la velocidad media considerando los cinco primeros segundos de caída.

4. **Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición de la derivada.

   a. $f: x \mapsto f(x) = -16x + 9$

   b. $f: x \mapsto f(x) = 5x$

   c. $f: x \mapsto f(x) = x^2 - x$

   d. $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 + 3x + 2$

   e. $f: x \mapsto f(x) = x - 6x^2$

La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales

A continuación se presentan algunas reglas básicas de la derivación, las cuales permitirán calcular las derivadas sin el uso de la definición de la derivada por límites.

Regla 1: Sea la función constante definida por: $f: x \mapsto f(x) = k$, donde k es constante. La derivada de una función constante es cero. $f'(x) = 0$.

Explica que al derivar una función constante, en general un número real, entonces la derivada es cero.

Hallamos las derivadas de:

a. $f: x \mapsto f(x) = -5$ entonces $f'(x) = 0$

b. $f: x \mapsto f(x) = 9\pi c$ entonces $f'(x) = 0$

c. $\frac{d}{dx}\sqrt{5}$ entonces $\frac{d}{dx} = 0$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{5}$ entonces $f'(x) = 0$

Regla 2: Sea la función definida por: $f: x \mapsto f(x) = x^n$. La derivada de esta función es $f'(x) = nx^{n-1}$. Cuando n es cualquier número real.

Explica que el exponente multiplica a la función y que la base x tiene una nueva potencia reducida en una unidad, con respecto a la función inicial.

Hallamos las derivadas de:

a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^3$ entonces $f'(x) = -15x^2$

b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5$ entonces $f'(x) = 45x^4$

c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2}$ entonces $f'(x) = 8x^{-3}$

Regla 3: La derivada en la adición o sustracción. Siendo las funciones g y h diferenciables:

Expone que la derivada de la suma o la resta de funciones es la suma o diferencia de las derivadas independientes de cada función de manera independiente.

$$\text{sea } f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$\text{sea } u(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow u'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Hallamos las derivadas de:

a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 8x^2$ entonces $f'(x) = 3x^2 + 16x$

b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5 + 12x^3$ entonces $f'(x) = 45x^4 + 36x^2$

c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2} - 15x$ entonces $f'(x) = 8x^{-3} - 15$

Estudiaremos el resto de reglas en el curso superior, debido a que el propósito de explicar únicamente las reglas mencionadas es que el estudiante pueda verificar los resultados obtenidos en la diferenciación por límites.

Actividades

5. **Deriva** las funciones utilizando las reglas de diferenciación básicas (reglas 1 a 3).

a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 + 8$

b. $f: x \mapsto f(x) = -5\pi^3$

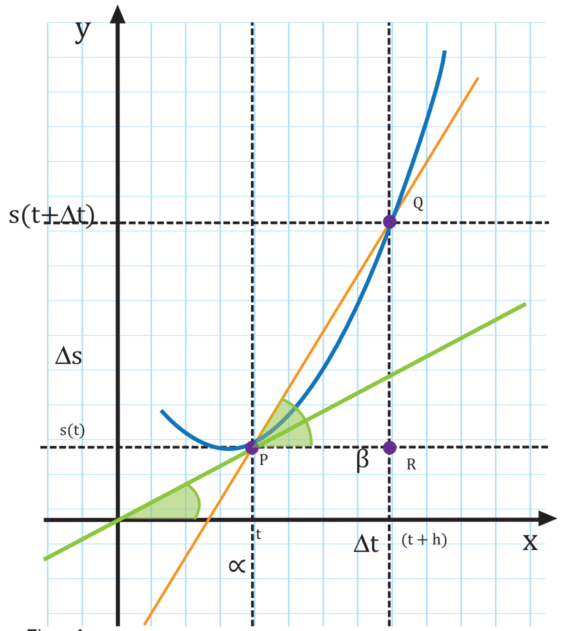
c. $f: x \mapsto f(x) = -e^2 + \frac{3}{7}$

d. $f: x \mapsto f(x) = -12x^2 + 8x + 15$

e. $f: x \mapsto f(x) = -20x^2 + \sqrt{12}$

f. $f: x \mapsto f(x) = \pi x + \sqrt{5}$

Interpretación física del cociente incremental (velocidad media)



■ Fig. 4.

La noción de derivada se explica de dos maneras: mediante la representación geométrica y la física.

La representación física hace referencia a la tasa de variación que existe en el intervalo $(t, t + h)$. Llamamos tasa de variación a la diferencia que existe entre el punto (t) y $(t + h)$, está se representa por Δt, así tenemos que:

$$\Delta t = [f(t + \Delta t) - f(t)]$$

Se define como velocidad media (v_m) al cociente entre la distancia recorrida (Δs) y el tiempo transcurrido (Δt).

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

La velocidad media está determinada por un intervalo de tiempo, ya sea este $(t, (t+h))$;además debemos tener en cuenta que la velocidad inicial siempre será 0; recuerda que debes trabajar en las unidades que el problema lo requiera.

Ejemplo 4

Una partícula se desplaza conforme a la expresión s: t ↦ $s(t) = 4t^2 - 2t + 3$; esta se encuentra expresada en metros (m) y el tiempo en segundos (s); determinemos.

a. La posición inicial.

b. La velocidad media en el intervalo de $2s$ a $5s$.

a. Posición inicial Para encontrar la posición inicial, reemplazamos en la función el tiempo inicial (t_0) en el que se desplazaba la partícula, en este caso parte del reposo, por lo tanto $(t_0) = 0$.	$s(t) = 4t^2 - 2t$ $s(0) = 4(0)^2 - 2(0) + 3$ $s(0) = 3\ m$
b. Velocidad media en el intervalo $t = 2s$ hasta $t = 5s$. Primero reemplazamos el valor de 2 s en la ecuación inicial, luego hacemos lo mismo con el valor de $5\ s$.	$s(t) = 4t^2 - 2t + 3$ $s(2) = 4(2)^2 - 2(2) + 3 = 15m$ $s(5) = 4(5)^2 - 2(5) + 3 = 93\ m$
Utilizamos la expresión de cociente incremental (pág. 88) velocidad media = $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{93 - 15}{5 - 2} = \frac{78}{3} = 26\ m/s$ La velocidad media de la partícula

■ Tabla 3.

Ejemplo 5

Un ciclista avanza $85\ m$ con una velocidad de $2{,}4\ m/s$; luego, incrementa su distancia a $103\ m$ con una velocidad de $4{,}6\ m/s$ durante una trayectoria lineal. Determinemos la velocidad media desarrollada por el ciclista.

Cálculo del tiempo Para obtener la velocidad media, requerimos el tiempo en el que se desplazó la bicicleta; para ello, optamos por la fórmula de $d = v \cdot t$ y despejamos el tiempo, donde se tendrá que : $t = \frac{d}{v}$	Se tiene como datos: $d_1 = 85\ m;\ v_1 = 2{,}4\frac{m}{s};\ d_2 = 103m$ y $v_2 = 4{,}6\ \frac{m}{s}$ $t_1 = \frac{d_1}{v_1}\ ;\ t_1 = \frac{85}{2{,}4}\ ;\ t_1 = 35{,}42\ s$ $t_2 = \frac{d_2}{v_2}\ ;\ t_2 = \frac{103}{4{,}6}\ ;\ t_2 = 22{,}39\ s$
Su velocidad media en el intervalo $t = 35{,}42s$ hasta $t = 22{,}39s.$ Como ya obtuvimos los valores del tiempo respectivos y tenemos los datos de las distancias, reemplazamos estos datos en la fórmula de la velocidad media. Recordemos que se debe considerar el valor absoluto de la velocidad media.	$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $v_m = \frac{103 - 85}{22{,}39 - 35{,}42}$ $v_m = \frac{18}{13{,}03}$ $v_m = 1{,}38$ La velocidad media del ciclista es $1{,}38\ \frac{m}{s}$

Tabla 4.

Actividades

6. **Resuelve.**

a. La posición de un automóvil se encuentra determinada por $s: t \mapsto s(t) = 4t^3 - 4t^2 + 5t - 1.$ **Determina** su posición inicial y su velocidad media en el intervalo $[5,11]$.

b. La función posición de un punto está determinada por $s: t \mapsto s(t) = 2t^3 - 4t - 5$. **Determina** la expresión para la velocidad media en el intervalo $[t, (t + h)]$ y halla la velocidad en el intervalo $[3, 5]$.

c. Una autobús se desplaza $100\ m$ con una velocidad de $3\ \frac{m}{s}$, luego incrementa su distancia a $250\ m$ con una velocidad de $7\ \frac{m}{s}$ y finalmente, alcanza una velocidad de $9\ \frac{m}{s}$ con $333\ m$. **Determina** la velocidad media entre sus desplazamientos.



https://goo.gl/7bXGY9

Interpretación física del cociente incremental (velocidad instantánea)

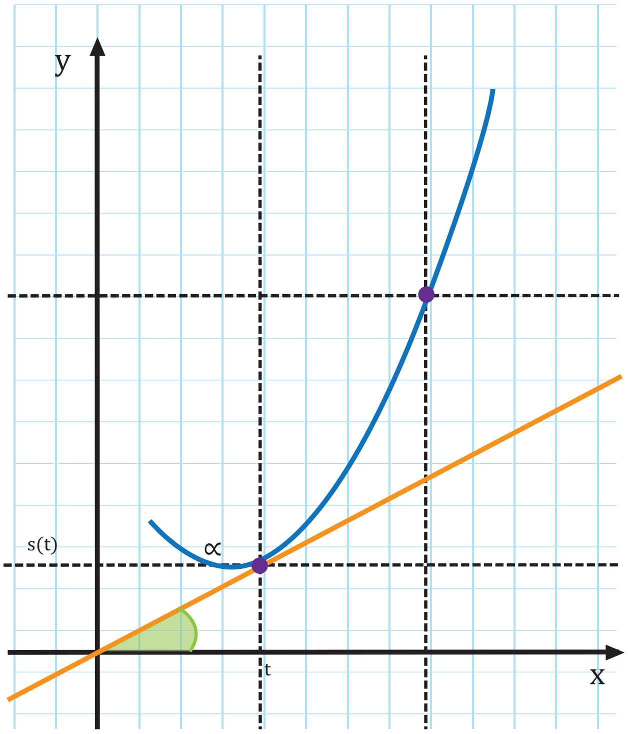


Fig. 5.

La velocidad instantánea es definida como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a 0.

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Cuando el límite no existe, lo denominamos como indeterminado. Existen dos procesos para conseguir la velocidad instantánea, la primera es utilizando la fórmula del límite cuando la variación del tiempo tiende a 0, y la segunda es obtener la primera derivada del desplazamiento que se denota como $s'(t)$ o $v(t)$, utilizando las reglas para derivar.

La velocidad instantánea se determina en un tiempo específico.

Ejemplo 6

La ecuación de desplazamiento de un objeto que parte del reposo y cae libremente por acción de la aceleración de la gravedad, está determinada por $s: t \mapsto s(t) = 8t^2 - 5t + 2$. Determinemos la velocidad instantánea del objeto cuando $t = 4{,}7s$ (utilice la primera derivada y la definición de límite).

Primer método: Utilizando la fórmula del límite cuando Δt tiende a cero.

Reemplazamos $(4{,}7 + \Delta t)$ en el numerador, en las variables t, y luego restamos $f(4,7)$.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(4{,}7+\Delta t) - f(4,7)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8(4{,}7+\Delta t)^2 - 5(4,7+\Delta t) + 2 - (8(4{,}7)^2 - 5\,(4{,}7) + 2}{\Delta t}$$

Resolvemos los productos notables y aplicamos la propiedad distributiva en los ( ).

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8(22{,}09 + 9{,}4\Delta t + \Delta t^2) - 23{,}5 - 5\Delta t + 2 - (176{,}72 - 23{,}5 + 2)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{176{,}72 - 75{,}2\Delta t + 8\,\Delta t^2 - 23{,}5 - 5\Delta t + 2 - 176{,}72 + 23{,}5\text{-}2)}{\Delta t}$$

Reducimos los términos semejantes.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{70{,}2\Delta t + 8\,\Delta t^2}{\Delta t}$$

Determinamos el factor común y simplificamos.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(70{,}2 + 8\,\Delta t)}{\Delta t}$$

Determinamos el valor del límite reemplazando Δt por 0.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t(70{,}2 + 8\,\Delta t) = 70{,}2\ \frac{m}{s}$$

Segundo método: Utilizando las reglas básicas de derivación (página 91).

Determinamos la primera derivada de la función:

$s(t) = 8t^2 - 5t + 2$. Aplicando las reglas 1, 2 y 3.

$s'(t) = 16t - 5$

Reemplazamos el valor de $t = 4{,}7$ segundos

$s'(4{,}7) = 16(4{,}7) - 5$

Resolvemos las operaciones

$v = 70{,}2\ \frac{m}{s}$

Respuesta: La velocidad instantánea es $70{,}2\ \frac{m}{s}$

Es notable que los resultados obtenidos, utilizando los dos métodos, son iguales.

Ejemplo 7

Se deja caer una piedra desde un edificio de 300 metros de altura. ¿Cuál es el tiempo en el que la piedra llega al suelo y con qué velocidad lo hace?

Razonamiento: Es notable que en el enunciado del ejercicio no disponemos del valor del tiempo, por ende, lo primero que se debe hacer es calcularlo.

Sea la ecuación de caída libre: $s(t) = v_o + \frac{1}{2}gt^2$ y sabiendo que $v_o = 0$ (se deja caer), $s = 300m$ y que el valor de $g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$, resulta la expresión:

$300 = 4{,}9t^2$

Despejamos la variable tiempo.

$$4{,}9\ t^2 = 300;\ t^2 = \frac{300}{4{,}9}\ ;\ t = \sqrt{\frac{300}{4{,}9}}\quad ;\quad t = 7{,}8\ s$$

Derivamos la expresión: $s(t) = 4{,}9\ t^2$

$s'(t) = 9{,}8\ t$; $s'(7{,}8) = 9{,}8\ (7{,}8)$; $s'(7{,}8) = 76{,}44\ \frac{m}{s}$

La piedra llega al suelo en 7,8 segundos con una velocidad de $76{,}44\ \frac{m}{s}$

Actividades

7. Se lanza hacia arriba una bola de béisbol con una velocidad inicial de $115\ \frac{m}{s}$, su distancia s en función de t está dada por $s: t \mapsto s(t) = 115t - 10t^2$. **Halla** la velocidad que alcanza en $t = 3$ y $t = 12$.
8. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta se expresa con $s: t \mapsto s(t) = 2t^3 + 5t^2 - 3t$, donde t está expresada en segundos. **Halla** la velocidad instantánea cuando $t = 5$.

Interpretación geométrica de la primera derivada

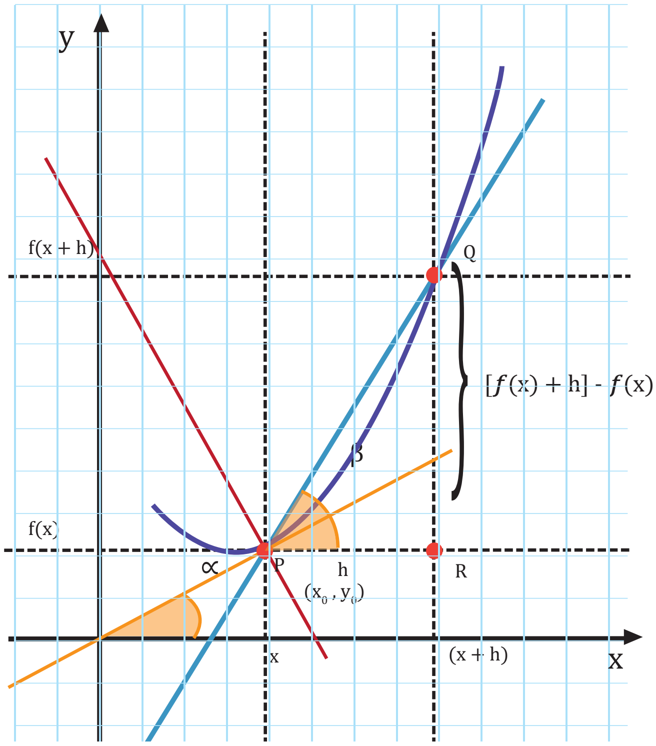


Fig. 6.

La interpretación geométrica de la primera derivada hace referencia a la pendiente de la curva que se genera mediante el movimiento de los puntos P, Q.

Los puntos Q y R son colineales, es decir, siempre van a estar ubicados en la misma recta si existiere algún desplazamiento.

La línea recta de color azul representa a la secante de la curva; esta, al experimentar el desplazamiento del punto Q, y por consiguiente, el traslado del punto R hacia P, se transforma en la tangente de la curva ; entonces, tenemos que h tiende a 0.

$$\tan \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(x)$$

La interpretación geométrica de la primera derivada, da lugar a dos tipos de rectas: tangente y normal.

- La recta tangente tiene por pendiente $f'(x_0)$; se define en $((x_o, f(x_o))$; solo está definida si f es derivable en x_0.
- La recta normal pasa por $((x_o, f(x_o))$ y es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Si se tienen dos rectas L_1 y L_2 perpendiculares y m_1 es la pendiente de L_1, entonces la pendiente de la recta normal será $-\frac{1}{m}$, por lo tanto $m_{normal} = -\frac{1}{f'(x_0)}$

El siguiente cuadro muestra las expresiones de las pendientes con sus respectivas ecuaciones para las rectas: tangente y normal correspondientemente.

Recta tangente	Recta normal
Pendiente: $m_{tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ Cuando el límite exista.	Pendiente: $m_{normal} = \frac{1}{f'(x_0)}$
Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $((x_o, f(x_o))$ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$	Ecuación de la recta normal a la gráfica de f en $((x_o, f(x_o)))$ $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

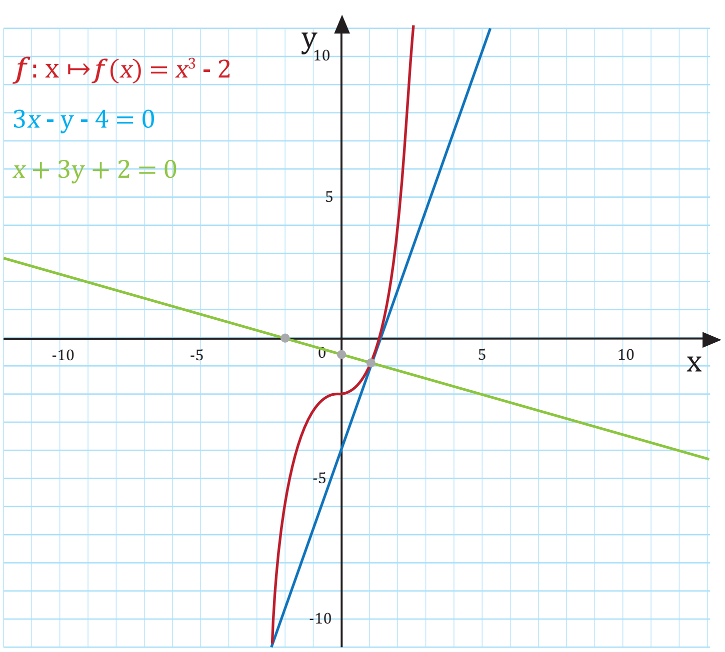
Tabla 5.

Ejemplo 8

Determinamos la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x)=x^3 - 2$ en el punto $(2, 0)$

Cálculo de la recta tangente	Cálculo de la recta normal
Primero determinamos la pendiente $m_{tangente} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	La pendiente para la recta normal $m_{normal} = - \dfrac{1}{f'(x_0)}$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - 2 - (x^3 - 2)}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2 - x^3 + 2}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0} 3x^2$ Por lo tanto $f'(x) = 3x^2$ $f'(1) = 3(1)^2 = 3$; $m_{tangente} = 3$	Como: $m_{tangente} = 3$ entonces $m_{normal} = -\dfrac{1}{3}$
Ecuación de la recta tangente $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $y + 1 = 3(x - 1)$ $y + 1 = 3x - 3$ Ecuación: $3x - y - 4 = 0$	Ecuación de la recta normal $y - f(x_0) = - \dfrac{f(4{,}7 + \Delta t) - f(4,7)}{\Delta t}$ $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x - 1)$ $3y + 3 = -x + 1$ Ecuación: $x + 3y + 2 = 0$

Tabla 6.



$f: x \mapsto f(x)=x^3 - 2$, con las rectas tangente y normal en el punto (2,0)

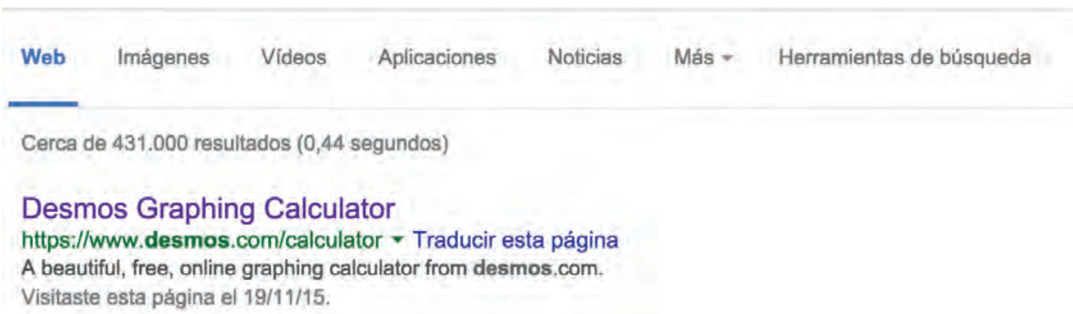
(rojo)	Función
(azul)	Recta tangente
(verde)	Recta normal

La derivada de funciones polinomiales utilizando las TIC

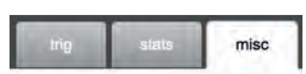
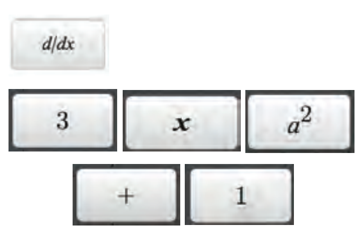
Un graficador nos permite representar las funciones de manera rápida y eficiente, y provee la alternativa de poder verificar las gráficas que se obtienen mediante el trazo manual.

Para graficar la derivada de funciones polinomiales, sugerimos el siguiente proceso:

1. **Ingresa** a www. google.com
2. **Busca** «Desmos» y **selecciona**: Desmos Graphing Calculator

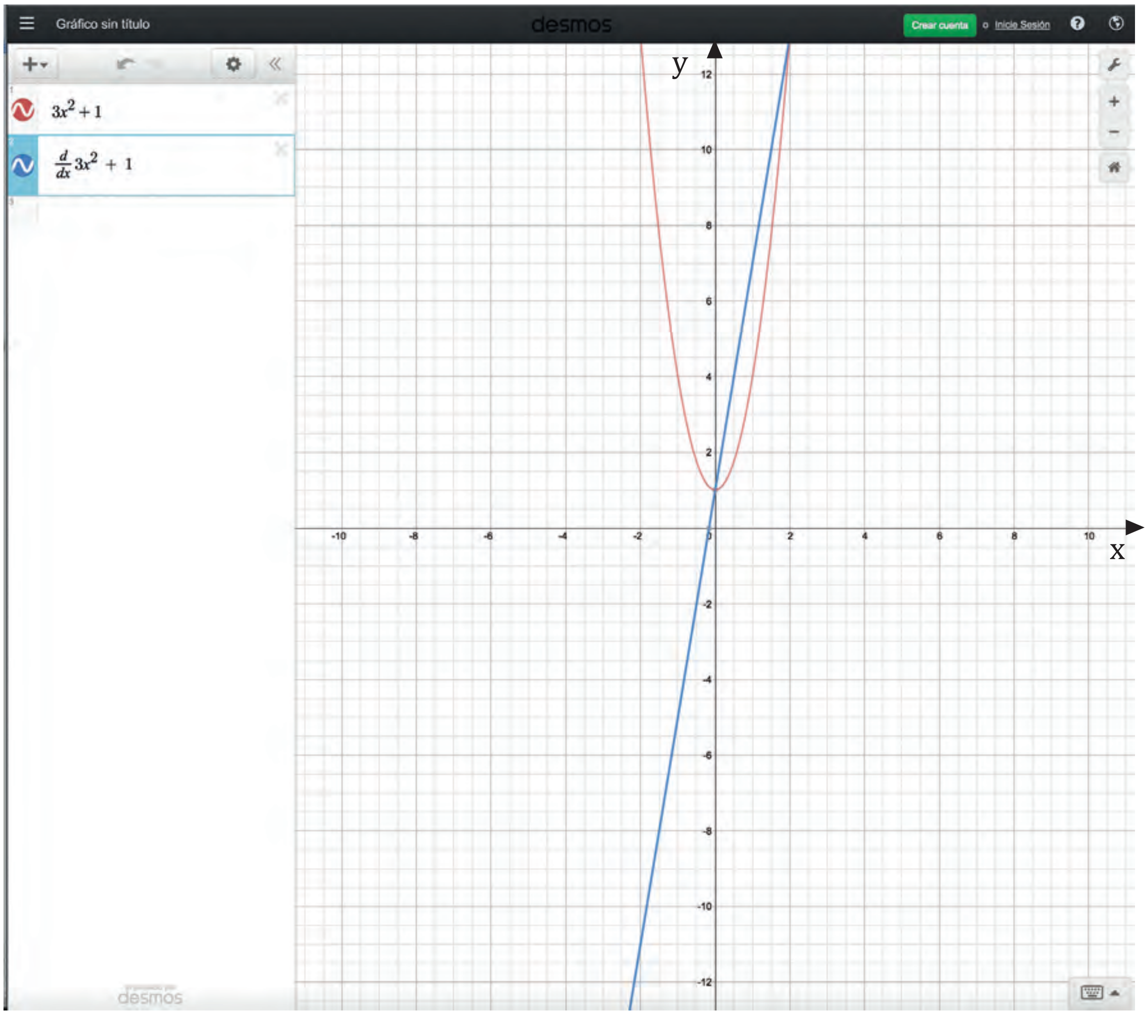


3. **Ingresa** al graficador haciendo clic.
4. En la pantalla de ingreso de funciones, **digita** la función y la derivada

$f(x) = 3x^2 + 1$	$\frac{d}{dx} 3x^2 + 1$
 **«Mostramos el teclado»** En el mismo, hacemos clic en el siguiente orden: 	 **«Mostramos el teclado»** En el mismo, hacemos clic en el siguiente orden:   Hacemos clic en «misc» 

■ Tabla 7.

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



Es notable en el gráfico que, al derivar una función polinomial, la derivada resulta una función de grado menor.

Como muestra la gráfica, una función cuadrática (azul) de segundo grado, luego de derivar, resulta una función lineal (verde) de grado 1.

Actividades

9. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

   a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^2 - 5$

   b. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 5$

   c. $f: x \mapsto f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$

   d. $f: x \mapsto f(x) = -x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{7}x - 12$

Derivada de una función racional mediante la definición de límites

De forma análoga, es posible obtener la derivada de una función racional cuyos esenciales son: adición y/o sustracción de fracciones algebraicas, fracciones complejas, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determine $f'(x)$ para $f(x)=\dfrac{3}{x}$	Determine $f'(x)$ para $f(x)=\dfrac{x}{(x-4)}$
En cada variable x insertamos la adición de h; luego, restamos la función original.	
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{3}{(x+h)}-\dfrac{3}{x}}{h}$	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{x+h}{x+h-4}-\dfrac{x}{(x-4)}}{h}$
Resolvemos la diferencia de fracciones algebraicas	
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{3x-3x-3h}{(x+h)(x)}}{h}$	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2+xh-4x-4h-x^2-xh+4x}{(x+h-4)(x-4)}}{h}$
Dividimos las fracciones algebraicas	
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x-3x-3h}{(x+h)(x)(h)}$	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+xh-4x-4h-x^2-xh+4x}{h(x+h-4)(x-4)}$
Reducimos los términos semejantes y simplificamos las fracciones	
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cancel{h}}{(x+h)(x)(\cancel{h})}$	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}+\cancel{xh}-\cancel{4x}-4h-\cancel{x^2}-\cancel{xh}+\cancel{4x}}{h(x+h-4)(x-4)}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}$	$f'(x)=\dfrac{-4}{(x-4)^2}$

Tabla 8.

Actividades

10. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x)= x^2 + 2$ en el punto (1, 3). **Realiza** la representación gráfica de la función y de las rectas: tangente y normal.

11. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x)= x^3 - 4$ en el punto (2, 4). **Realiza** la representación gráfica de la función y de las rectas tangente y normal.

12. **Determina** la derivada de las funciones racionales utilizando la definición de la derivada por límites.

a. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{5x}{x+3}$

b. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{4}{x^2-1}$

c. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

La derivada de funciones racionales utilizando las TIC

Para graficar la derivada de funciones racionales, sugerimos el siguiente proceso:

1. **Ingresa** a www. google.com
2. **Busca** «Desmos» y seleccionamos: Desmos Graphing Calculator

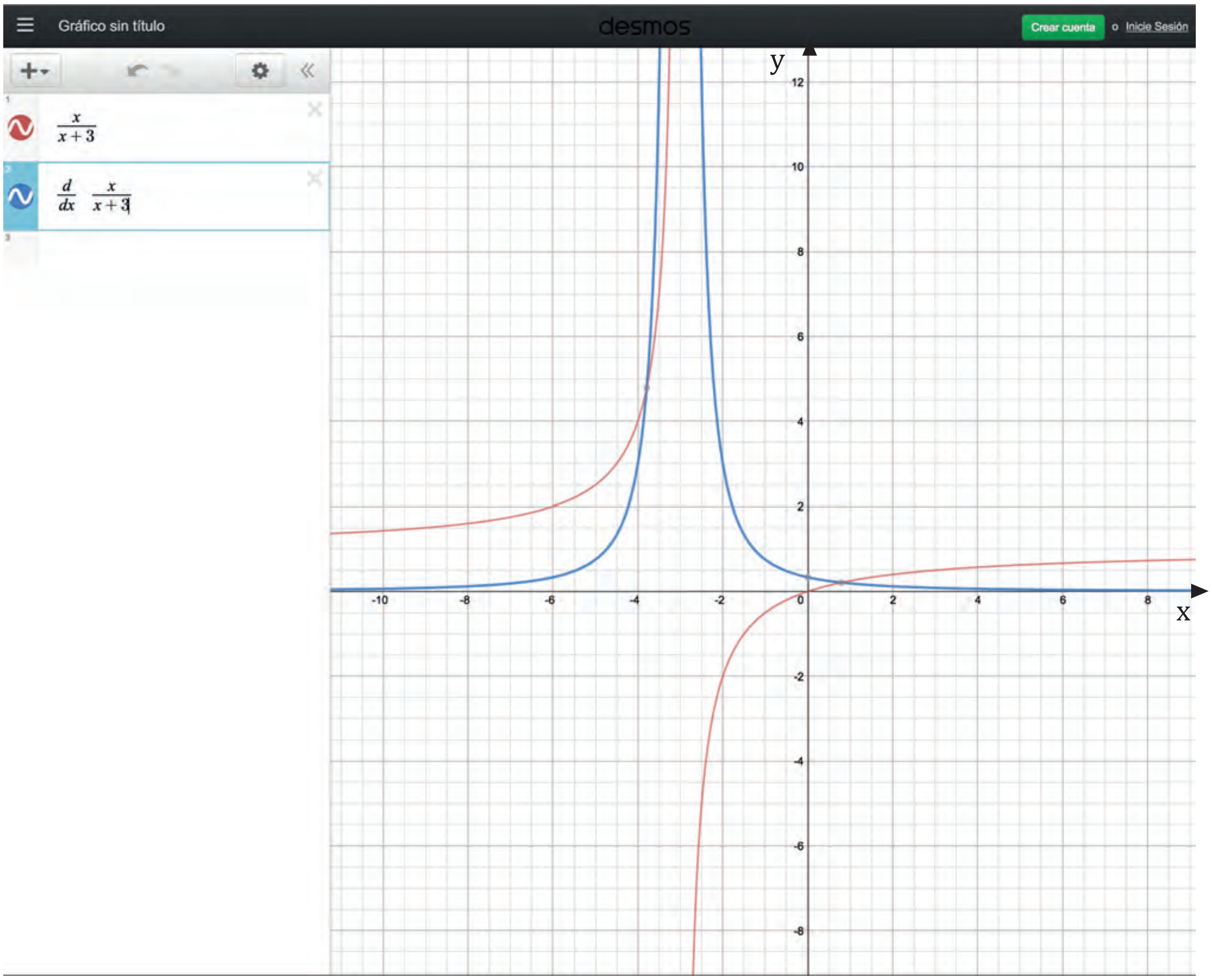


3. **Ingresa** al graficador haciendo clic.
4. En la pantalla de ingreso de funciones, **digita** la función y la derivada

$f(x) = \dfrac{x}{x+3}$	$\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{x}{x+3}$
 **«Mostramos el teclado»** En el mismo, hacemos clic en el siguiente orden: 	 **«Mostramos el teclado»** En el mismo, hacemos clic en el siguiente orden:  Hacemos clic en «misc»  

Tabla 9.

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y=0$.

Actividades

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{4}{x-5}$

b. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

c. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$

d. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$

Segunda derivada de funciones polinómicas

Sea n un número natural y sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ números reales con $a_n \neq 0$, entonces la función polinómica de x de grado n viene terminada por la siguiente expresión:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$; todos los términos expresados por a se denominan coeficientes $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, en tanto que a_0, término independiente o término constante.

Entre las funciones polinómicas tenemos: funciones constantes, funciones cuadráticas, funciones cúbicas, funciones a trozos, funciones radicales y funciones racionales.

Si la primera derivada de una función es factible y además es diferente de un coeficiente, entonces podremos continuar derivando la función hasta que esta sea realizable.

Mediante la segunda o demás derivadas, podemos conocer la pendiente de la recta tangente a la curva que deseamos analizar, y esto lo podemos comprobar en su gráfica.

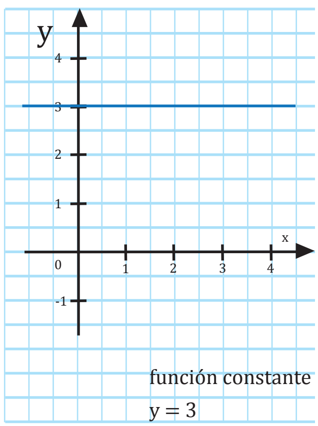


Fig. 7.

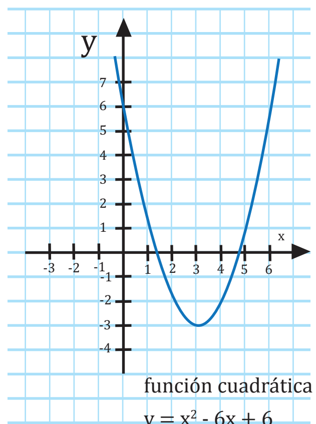


Fig. 8.

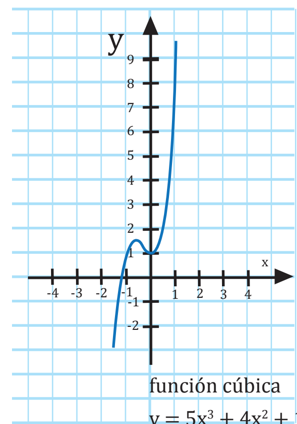


Fig. 9.

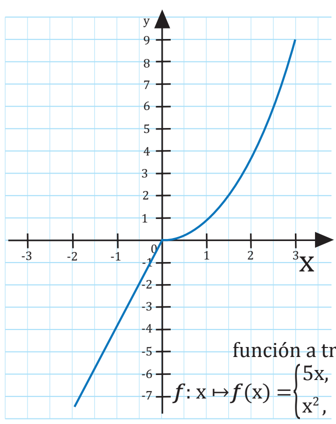


Fig. 10.

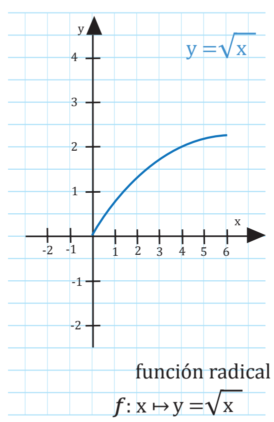


Fig. 11.

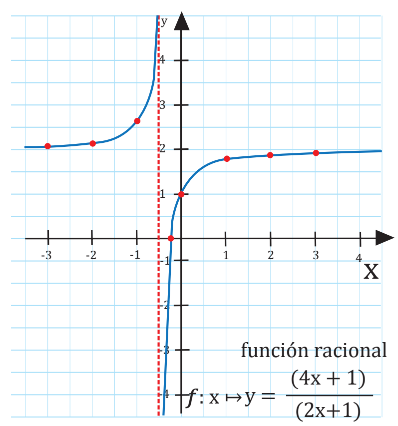


Fig. 12.

Ejemplo 9

Hallemos la pendiente de la tangente de la siguiente función

$f: x \mapsto f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5.$

Obtenemos la primera y segunda derivada de la función. Tomamos en consideración que la pendiente de la recta también se encuentra definida por la ecuación $y = mx + b$, también, si realizamos una tercera derivada, obtenemos la misma pendiente.

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ Primera derivada

$f''(x) = 6x + 4$ Segunda derivada que al comparar con $y = mx + b$

Se puede concluir que: $m = 6$

Interpretación física de la segunda derivada (aceleración media)

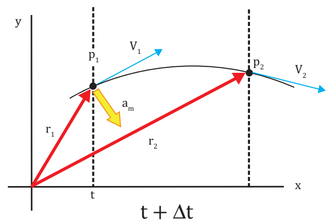
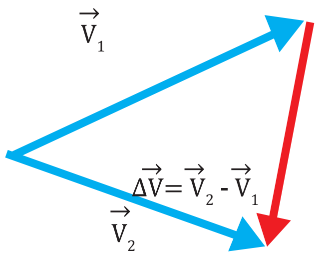


Fig. 13.

La velocidad se ve modificada en su dirección debido a que esta magnitud es tangente a la trayectoria de la curva como lo podemos ver en la figura.

Los vectores velocidad corresponden a los puntos t y $t + \Delta t$ cuando pasan por los puntos P y Q correspondientemente. La variación de la velocidad la obtenemos mediante la diferencia entre el vector velocidad uno y dos. Se define la aceleración media entre los puntos P_1 y P_2 como el cociente entre la variación de la velocidad Δv y la variación del tiempo Δt.



Vector variacion de velocidad

Fig. 14.

La dirección y sentido de la velocidad media son iguales al vector variación de la velocidad. Entonces:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$$

Ejemplo 10

Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de manera que la altura sobre el nivel del suelo está dada por la ecuación: $h = 32\,t - \frac{1}{2}(10)t^2$, donde la altura se mide en metros. Determinemos la aceleración media en el intervalo $t = 2s$ hasta $t = 3s$.

Primero, se debe derivar la función de desplazamiento para obtener la velocidad $h = 32\,t - \frac{1}{2}(10)t^2$

Derivamos la función y se obtiene $v = 32 - 10t$

Segundo, determinamos el valor de la velocidad para cada uno de los intervalos.

Cuando $t = 2s$
$v = 32 - 10t$
$v = 32 - 10\,(2)$
$v = 12$

Cuando $t = 3s$
$v = 32 - 10t$
$v = 32 - 10\,(3)$
$v = 3$

Tercero, utilizamos la expresión: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3 - 12}{3 - 2}$$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-9}{1} = -9$$

La aceleración media es de $-9\,\frac{m}{s^2}$, el signo negativo significa que esta con movimiento retardado, está frenando.

Interpretación física de la segunda derivada aceleración instantánea

Se define a la aceleración instantánea como el límite al que tiende la velocidad media cuando Δt tiende a 0, es decir, la primera derivada del vector velocidad, o también como la segunda derivada del desplazamiento en función de t.

La dirección y sentido de la aceleración instantánea, generalmente, no concuerda con la del vector velocidad, sino que más bien depende del cambio que existiera en este.

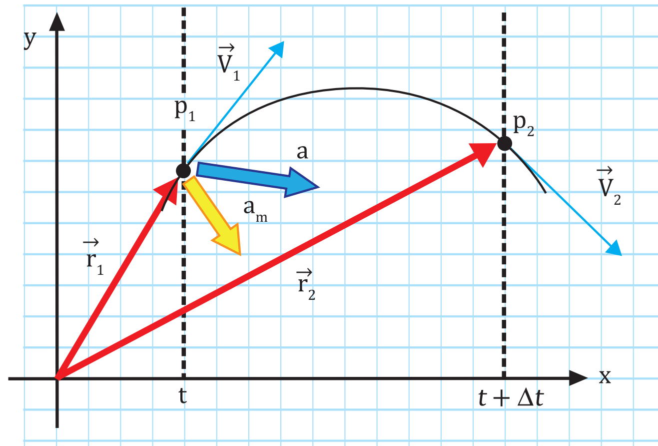


Fig. 15.

Tenemos que:

$$a = v'(t) = s''(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} a_m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ejemplo 11

El movimiento de una motocicleta está dada por $s(t) = 3t^2 - 5t + 8$.
Calculemos la aceleración instantánea.
Determinamos la primera y segunda derivada, siendo esta última la ecuación de aceleración, o ya sea la aceleración misma. En cualquier instante de tiempo, la aceleración es la misma.

$s(t) = 3t^2 - 5t + 8$
$s'(t) = 6t - 5$ función velocidad
$s''(t) = 6 \ \frac{m}{s^2}$ valor de la aceleración instantánea

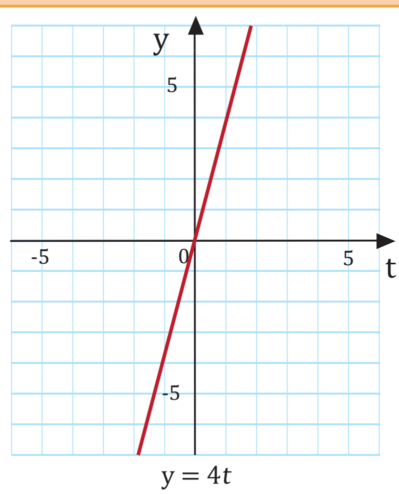
Ejemplo 12

Una partícula se desplaza con velocidad constante según la función : y= 4t, donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos; determinemos, mediante el análisis gráfico y la derivada , la velocidad de la partícula y verifiquemos el valor de la aceleración.

Tabla de valores

t(seg)	$y = f(t)$
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Gráfico



$y = 4t$

Derivada

$y = 4t$
y' representa fisicamente la velocidad instántanea.

$y' = 4$ Entonces $v = 4 \ \frac{m}{s^2}$

Además la segunda derivada representa físicamente la aceleración.

$y'' = 0$ Entonces $a = 0 \ \frac{m}{s^2}$

De esta manera, verificamos que la aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme es cero.

Tabla 10.

Monotonía de funciones polinomiales de grado ≤ 4

La monotonía de funciones es una característica de las funciones en donde se analiza el comportamiento o tendencia de la curva de la gráfica, la misma que puede aumentar, disminuir o no variar de ninguna forma (permanecer constante), considerando un intervalo de números en donde se analiza la función.

Los diferentes tipos de análisis, nos muestran que una función es creciente, decreciente o constante, según lo resume la siguiente tabla.

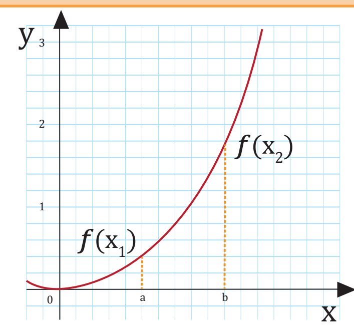
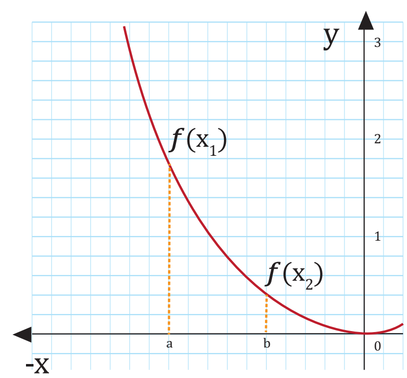
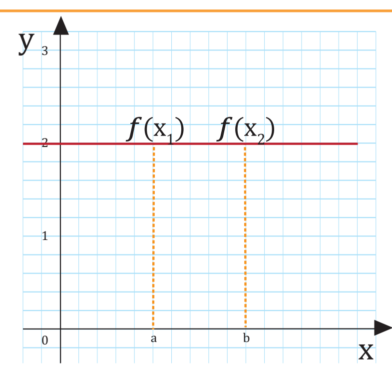
Tipo de curva	Análisis Algebraico	Análisis Numérico	Análisis Gráfico
Función creciente En el intervalo: $a \leq x \leq b$	Cuando $(x_1) < (x_2)$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$	Las imágenes obtenidas luego de ingresar los valores de x aumentan su valor numérico .	
Función decreciente En el intervalo: $a \leq x \leq b$	Cuando $(x_1) < (x_2)$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$	Las imágenes obtenidas luego de ingresar los valores de x disminuyen su valor numérico .	
Función constante En el intervalo: $a \leq x \leq b$	Para cada (x_1) y (x_2) entonces $f(x_1) = f(x_2)$	Las imágenes obtenidas luego de ingresar los valores de x son iguales	

Tabla 11.

Una función es estrictamente monótona sobre un intervalo determinado si resulta creciente o decreciente en todo el intervalo.

Los intervalos se pueden analizar de forma gráfica o utilizando principios de cálculo para determinarlos con mayor certeza, lo cual se aprenderá en una futura sección.

Análisis de intervalos (Crecientes, decrecientes y constantes)

El análisis gráfico relaciona la tendencia de la gráfica con los valores del eje horizontal.

Sean las funciones $f: x \mapsto f(x) = x^3$ y $f: x \mapsto f(x) = -x^2$, establezca los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

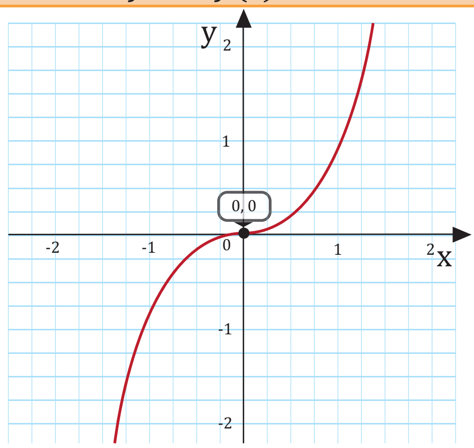
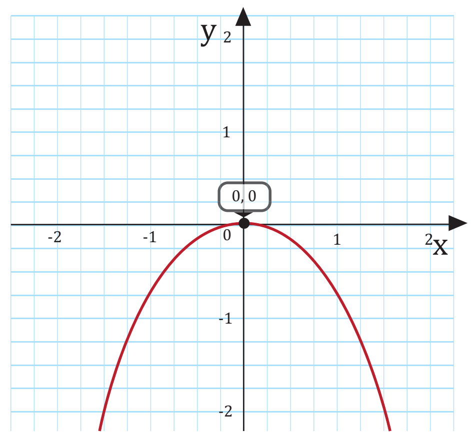
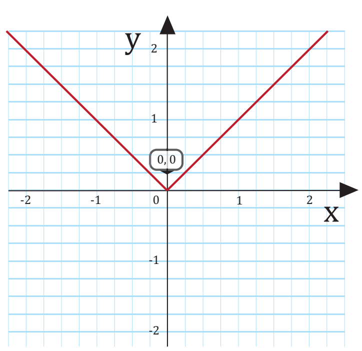
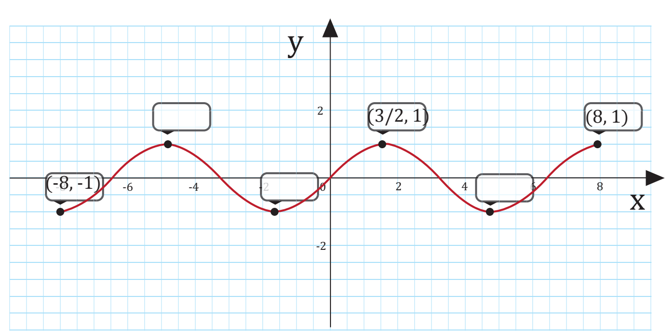
$f: x \mapsto f(x) = x^3$	$f: x \mapsto f(x) = -x^2$
	
En el intervalo $(-\infty\ ;\ 0]$ se observamos que los valores desde -1 hasta 0, van creciendo, por ende, la función es creciente. Y en el intervalo $(0;\ \infty)$ se observamos que la función sigue creciendo y aumentando sus valores , esta vez proyectados hacia el infinito positivo, por ende, la tendencia de la función sigue siendo creciente.	En $(-\infty\ ;\ 0]$ observamos que en los valores desde el infinito negativo hasta 0, la función es creciente. En cambio, en el intervalo $(0;\ \infty)$ la función tiene tendencia decreciente.
Creciente : $(-\infty\ ;\ 0]$ Creciente: $(0\ ;\ \infty)$	Creciente : $(-\infty\ ;\ 0]$ Decreciente: $(0\ ;\ \infty)$

Tabla 12.

Actividades

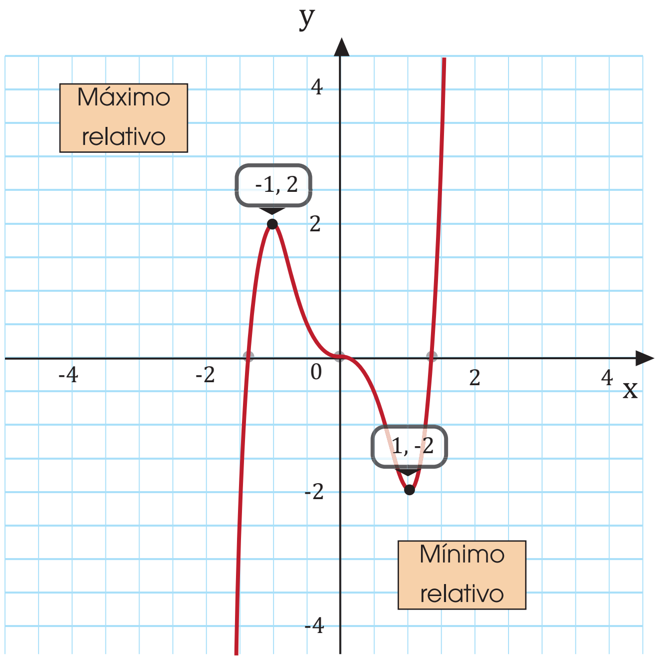
14. En las siguientes gráficas, **determina** los intervalos donde la función es creciente y decreciente.





Máximos y mínimos de una función

El cálculo de la «altura máxima» como una aplicación de las funciones cuadráticas conllevaba a calcular la primera componente (x), misma que nos servirá de insumo para maximizar la altura de un cuerpo, conocida la función.



■ Fig. 15.

A los puntos máximos y mínimos de una función los conocemos como los extremos relativos y constituyen una referencia para representar gráficamente una función.

Una función $f: x \rightarrow f(x)$ tiene un máximo absoluto o relativo en un punto donde $x = a$, si $f(a)$ es el mayor valor que cualquiera de los valores que se "generan" en la función.

Mientras que un mínimo relativo o mínimo absoluto, será el menor valor que cualquiera de los que toma la función.

En la gráfica, se analizan los puntos máximos y mínimos correspondientemente.

Máximo relativo $(-1, 2)$

Mínimo relativo $(1, -2)$

Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$ se llaman valores críticos, los mismos que determinan puntos de cambio en la curva de la función.

Relación de la primera derivada con las funciones crecientes y decrecientes

Sea una función $f(x)$, considerada en el intervalo $a \leq x \leq b$, se tienen los criterios:

- Si la primera derivada resulta un valor positivo, es decir $f'(x) > 0$, entonces la función en el intervalo considerado es creciente.
- En cambio, si la primera derivada resulta un valor negativo, es decir $f'(x) < 0$, entonces la función en el intervalo considerado es decreciente.
- Si al obtener la primera derivada resulta cero, $f'(x) = 0$, entonces la función en el intervalo considerado es constante.

Método para calcular los máximos y mínimos de una función polinómica

Al máximo y mínimo de una función lo determinamos mediante el siguiente proceso:

Sea $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$, determinar los extremos relativos de la función y realizar la representación gráfica, para verificar su respuesta.

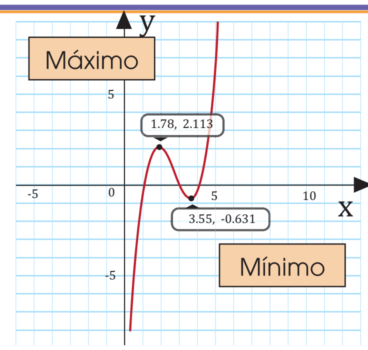
a. Realizamos la representación gráfica utilizando el graficador Desmos.	
b. Determinamos la primera derivada de la función.	$f'(x)= 3x^2 - 16x + 19$
c. Igualamos la primera derivada a cero, luego determinamos los valores de las raíces en la expresión resultante (utilizando las técnicas de factorización).	$3x^2 - 16x + 19=0$ Utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos los valores aproximados : $x_1 \approx 3,55$ $\quad x_2 \approx 1,78$
d. Reemplazamos los valores críticos obtenidos en la expresión original, para determinar el correspondiente $f(x)$ de cada uno.	$f(x)= x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ $f(3,55)=(3,55)^3 - 8(3,55)^2 + 19(3,55) - 12 = -0,63$ $f(1,78)= (1,78)^3 - 8(1,78)^2 + 19(1,78) - 12 = 2,11$
máximo $(1,78 ; 2,11)$ y mínimo $(3,55;- 0,63)$	

Tabla 13.

Máximos y mínimos de una función racional

Sea $f: x \mapsto f(x)= \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 4}$

Mediante un proceso análogo, determinamos la primera derivada: $f'(x)= \dfrac{- 12x}{(x^2 - 4)^2}$

Determinamos las raíces igualando a cero, por lo que solo se considera el denominador.

$-12x = 0$ por lo que $x = 0$

Reemplazamos la raíz obtenida en $f: x \mapsto f(x)= \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 4}$

$f(0)=\dfrac{- 2}{- 4}$; $f(0)=\dfrac{1}{2}$; $f(0) \approx 0,5$

Máximo $(0 , 05)$

Analizamos las excepciones en el denominador, para determinar las asíntotas verticales

$x^2 - 4 \neq 0$ resultará que $x^2 \neq 4$ por lo que $x = \pm 2$.

Entonces las asíntotas verticales se ubicarán en $x = 2$ y $x = - 2$

Según la gráfica la función es creciente en los intervalos : $(-\infty;-2)$ y $(-2; 0]$

Y la función es decreciente en los intervalos : $[0,2)$ y $(2; \infty)$

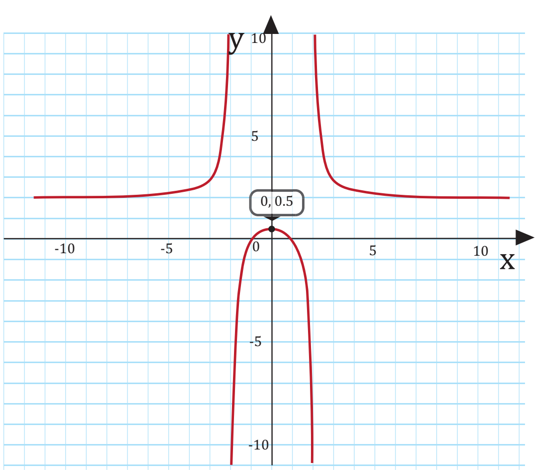
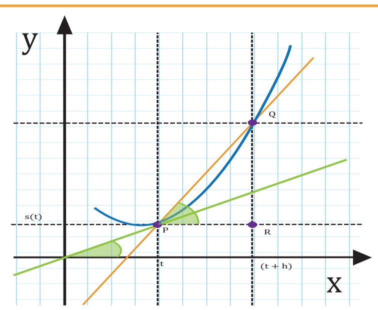


Fig. 16.

3 Resumen

Cociente Incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretación Física



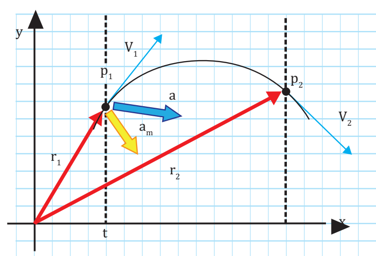
Primera derivada

Velocidad media:

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



Segunda derivada

Aceleración media:

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea:

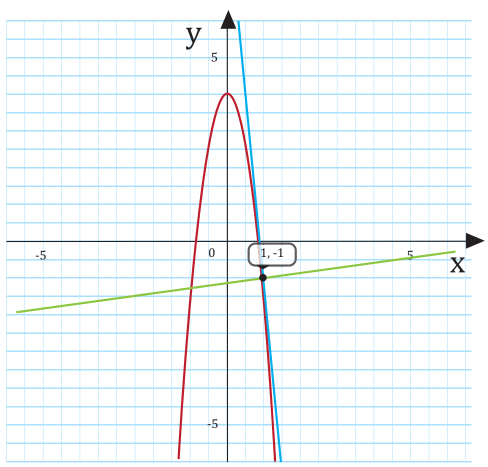
$$a = v'(t) = s''(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Tabla 14.

Interpretación Geométrica

Las pendientes de las rectas tangente y normal son inversas.

Las rectas normal y tangente son perpendiculares.



Recta Tangente

Pendiente:

$$m_{tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ecuación de la recta tangente

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Recta Normal

Pendiente:

$$m_{normal} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ecuación de la recta tangente

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Tabla 15.

Aplicaciones de la derivada

Ejercicios de Física. Calculando la primera derivada en las ecuaciones de desplazamiento, la primera derivada representa físicamente la velocidad y la segunda derivada, la aceleración de una partícula.	Trazado de curvas. Mediante la derivada de una función, podemos determinar si la gráfica es creciente o decreciente, además, podemos determinar los extremos relativos como son máximos y mínimos.

Tabla 16.

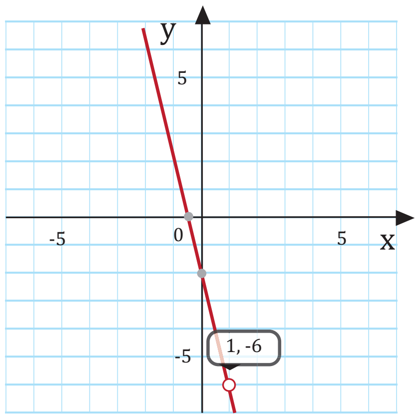
Problemas resueltos

A Límites

1. **Determina** el $\lim_{x\to 1}(-4x - 2)$ utilizando la noción en la que se analice la tabla de valores aproximada y la representación gráfica.

Solución

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
$f(x)$	...	-5,92	-5,96	-6,04	-6,08	-6,12	...
$(x, f(x))$	...	(0,98;-5,92)	(0,99;-5,96)	(1,01;-6,04)	(1,02;-6,08)	(1,03;-6,12)	...



Como podemos observar en el gráfico, en el punto $(1, -6)$ existe una discontinuidad.
Es decir, el $\lim_{x\to 1} -4x - 2 = -6$

Verificando numéricamente, tenemos:
$\lim_{x\to 1} -4(1) - 2 = -4 - 2 = -6$

B Derivadas

2. **Determina** $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = 5x^2 - 9$ utilizando la definición de la derivada por límites.

Solución

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)^2 - 9 - (5x^2 - 9)}{h}$$
Reemplazamos $(x + h)$ en la variable x, luego restamos $f(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 9 - 5x^2 + 9}{h}$$
Resolvemos el producto notable y resolvemos ( )

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{10xh + 5h^2}{h}$$
Reducción de términos semejantes

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(10x + 5h)}{h}$$
Factor común y simplificación de fracciones

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 10x$$
Determinamos el límite reemplazando h por 0.

3. **Determina** $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = 4x^5 + 7x^3 - 8x^2 - 12x + 25$, utilizando las reglas básicas de la derivación.

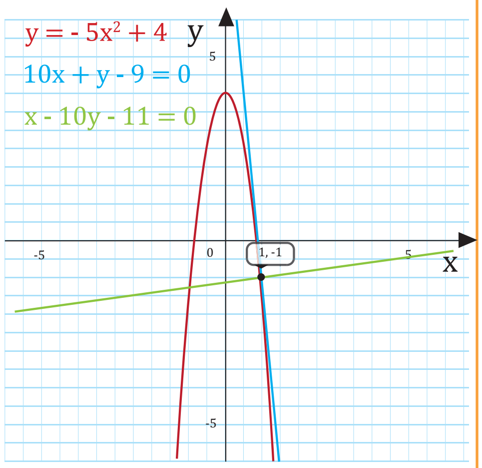
$f: x \mapsto f(x) = 4x^5 + 7x^3 - 8x^2 - 12x + 25$

$f'(x) = 20x^4 + 21x^2 - 16x - 12$ Utilizamos las reglas básicas de la derivada.

C Interpretación geométrica de la derivada

4. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 + 4$ en el punto (1, -1)

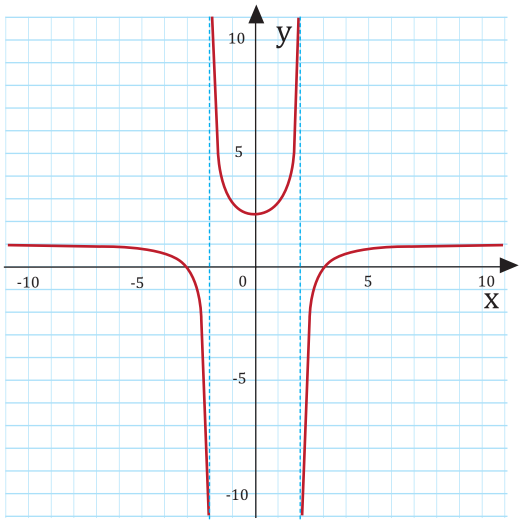
Solución

Cálculo de la recta tangente	Cálculo de la recta normal	Gráfica de la función y las rectas tangente y normal
Derivamos la función $f'(x) = -10x$ Determinamos $f'(1)$ $f'(1) = -10(1) = -10$ $m_{tangente} = -10$	Como : $m_{tangente} = -10$ entonces $m_{normal} = \frac{1}{10}$	
Ecuación de la recta tangente $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $y + 1 = -10(x - 1)$ $y + 1 = -10x + 10$ Ecuación: $10x + y - 9 = 0$	Ecuación de la recta normal $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$ $y + 1 = \frac{1}{10}(x - 1)$ $10y + 10 = x - 1$ Ecuación: $x - 10y - 11 = 0$	

D Máximos y Mínimos

5. Sea $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$, **realiza** el análisis de las propiedades de la gráfica.

Solución

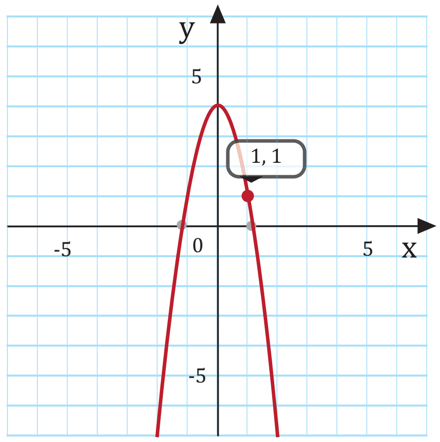
Analisis de la gráfica		Gráfica de la función y las rectas tangente y normal
Derivamos la función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ Obteniendo la función $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$	Igualamos el numerador a cero para determinar las raíces. $10x = 0$, entonces $x = 0$ Reemplazamos x en la función original. $f(0) = \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$ Extremo relativo $(0, \frac{3}{2})$	
Determinamos las asíntotas verticales. $x^2 - 4 = 0$ $x^2 = 4$ $x = \pm 2$ $x = 2$; $x = -2$	Intervalos Creciente $(0, 2)$ y $(2, \infty)$ Decreciente $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$	

Ejercicios y problemas

1 Límites

1. **Determina** el $\lim_{x \to x_0} (-3x^2 + 4)$; analiza la tabla de valores aproximada y la representación gráfica.

x	⋯	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	⋯
$f(x)$	⋯						⋯
$(x, f(x))$							

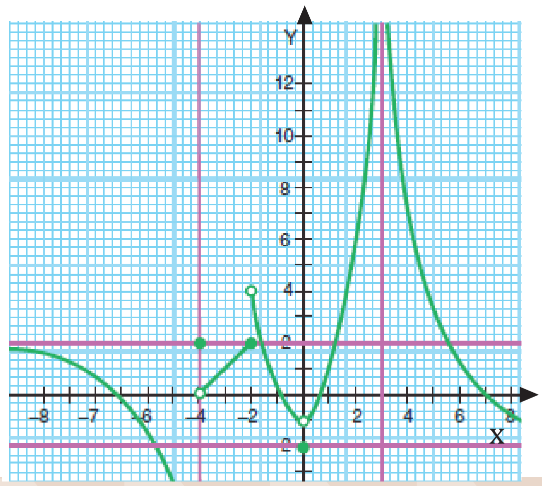


2 Cociente incremental

2. Un cuerpo se mueve según la ecuación $y = 17t^2$, si la distancia se mide en metros, **determina** la velocidad media considerando los 3 primeros segundos de caída.

3. Una partícula cae según la ecuación $y = 28t^2 + 3$, si la distancia se mide en metros. **Halla** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de movimiento.

4. Considera la gráfica de la función *f*.



- **Halla** los siguientes límites:
  a. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
  b. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
  c. $\lim_{x \to -4^-} f(x)$
  d. $\lim_{x \to -4^+} f(x)$
  e. $\lim_{x \to -4} f(x)$
  f. $\lim_{x \to -2^-} f(x)$
  g. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$
  h. $\lim_{x \to -2} f(x)$
  i. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$
  j. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$
  k. $\lim_{x \to 3} f(x)$
  l. $\lim_{x \to 0} f(x)$
- **Indica** en qué puntos *f* no es continua.

3 Derivadas (límites)

5. **Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición por límites.
   a. $f: x \mapsto f(x) = -5x + 2$
   b. $f: x \mapsto f(x) = 2x^2 + x$
   c. $f: x \mapsto f(x) = 10x^3$
   d. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - x + 2$
   e. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 4 + x^2$
   f. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$
   g. $f: x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$

6. **Calcula**, a partir de la definición, la derivada de la función constante y **comprueba** que es la función cero.

7. **Calcula**, a partir de la definición, la derivada de la función $f: x \mapsto f(x) = x^n$ para $n = 1, 2$ y 3, y **comprueba** que se verifica $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

8. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^9$

b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$

d. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$

e. $f: x \mapsto f(x) = \cos x \cdot e^x$

f. $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 \cdot \ln x$

g. $f: x \mapsto f(x) = (5x^6 - 3x^2) \cdot (7x^4 - 3x^2)$

h. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 8x + 9}{\cos x}$

i. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{4x \cdot \text{sen } x}{3 - 4e^x}$

4 Derivadas (reglas)

9. **Deriva** las funciones utilizando las reglas de derivación.

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 4x + 9x^2$

b. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$

c. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$

d. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$

e. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4x} - \sqrt[3]{x} + 15$

10. **Aplica** la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)^3$

b. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen } (x^2 + 5)$

c. $f: x \mapsto f(x) = \ln (\text{sen } x)$

d. $f: x \mapsto f(x) = \cos^2 (x^3 + 2x^2)$

11. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes e **indica** en qué casos has aplicado la regla de la cadena:

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 12x^2$

b. $f: x \mapsto f(x) = 4\text{In } x - x$

c. $f: x \mapsto f(x) = 4\cos (x) - x \cdot \ln x$

d. $f: x \mapsto f(x) = (2x + 3)^2$

e. $f: x \mapsto f(x) = e^{\cos (x)}$

f. $f: x \mapsto f(x) = \ln 3x^2$

12. **Averigua** si es cierta la afirmación siguiente:

$$f(x) = \frac{k}{g(x)} \Rightarrow f'(x) \quad \frac{k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

13. **Demuestra** que la derivada de $f(x) = \text{tg } (x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 (x)}$$

14. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes:

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 3x + 4$

b. $f: x \mapsto f(x) = 4 \ln x - x$

c. $f: x \mapsto f(x) = e^x \cdot \text{sen } (x)$

d. $f: x \mapsto f(x) = 4 \cos (x) - x \cdot \ln x$

e. $f: x \mapsto f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$

15. **Aplica** la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = (2x + 3)^2$

b. $g: x \mapsto g(x) = \text{sen } (5x)$

c. $h: x \mapsto h(x) = e^{\cos (x)}$

d. $i: x \mapsto i(x) = \ln (\text{sen } (x)^2)$

e. $j: x \mapsto j(x) = \cos^2 (x^3)$

f. $k: x \mapsto k(x) = \sqrt{\text{sen } (x)}$

16. **Calcula** la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

a. $f: x \mapsto f(x) = \text{tg}\,(3x)$

b. $f: x \mapsto f(x) = e^{x^2} \cdot \text{sen}\,(3x)$

17. Dada la función $f(x) = x^2 - 7x + 1$, **averigua** el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 2$ y $x = 10$.

5 Derivadas sucesivas

18. **Determina** $f'(x), f''(x), f'''(x)$ en las siguientes funciones.

a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^3 - 4x^2 + 2$

b. $f: x \mapsto f(x) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{4x} - \sqrt{27}x + \sqrt{x} + 15$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

6 Rectas tangentes y normales

19. Considerando la ecuación $f(x) = -3x^3 + 4$ en el punto $(-1, 7)$, **determina**:

a. La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.

b. La pendiente de la recta tangente en el punto dado.

c. La pendiente de la recta normal en el punto dado.

d. La ecuación de la recta tangente

e. La ecuación de la recta normal

f. La representación gráfica de la función y las rectas tangente y perpendicular al punto dado.

20. Considerando la ecuación $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$, **determina**.

a. La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente

b. La pendiente de la recta tangente en el punto dado

c. La pendiente de la recta normal en el punto dado

d. La ecuación de la recta tangente

e. La ecuación de la recta normal

f. La representación gráfica de la función y las rectas tangente y perpendicular al punto dado

21. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$, **comprueba** que la función derivada se anula en el punto de abscisa:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

- ¿Cómo será la tangente en dicho punto con respecto al eje de abscisas?

22. **Averigua** la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f: x \mapsto f(x) = x \cdot \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

23. **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 2x + 10$, en el punto de abscisa $x = -2$.

b. $f: x \mapsto f(x) = e^x$, en el punto de abscisa $x = 0$.

c. $f: x \mapsto f(x) = \ln x$, en el punto en que la gráfica corta al eje de abscisas.

24. **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

–¿En qué punto la tangente es paralela al eje de abscisas?

25. El número de átomos de una muestra de material radioactivo se desintegra a medida que pasa el tiempo según la siguiente función:

$N(t) = \frac{k}{e^t}$ N(t): Número de átomos

t: Tiempo

–**Razona** cuándo se desintegra más rápidamente el material, ¿al inicio o al final del proceso?

26. Dada la función $f(x) = k \cdot \ln x$, donde k es una constante, **halla** el valor de esta sabiendo que la derivada de la función en el punto de abscisa $x = 1$ es igual a 3.

27. Averigua el valor de los coeficientes m, n y p de la función:

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(0, 2)$ y que $f'(2) = f'(0) = 1$.

7 Aplicaciones de la derivada

28. Desde un globo aerostático en reposo que está a una altura de 1300 m sobre el suelo, se lanza una piedra verticalmente hacia arriba que lleva velocidad inicial de 25 $\frac{m}{s}$. **Determina.**

a. La expresión de movimiento

b. La expresión de la velocidad

c. La velocidad para $t = 1s$.

d. La velocidad para $t = 2s$.

e. La aceleración para $t = 2s$.

29. Un cuerpo en caída libre recorre $\frac{1}{2}pt^2$, donde la distancia se mide en m, el tiempo en segundos y p es la aceleración de la gravedad. **Calcula** la velocidad y la aceleración a los 2s.

30. Un móvil que viaja a 30 $\frac{m}{s}$ aplica el freno de manera repentina. Si el movimiento realizado se modela según la ecuación: $y = 30t - t^2$, **halla** la distancia recorrida así como la aceleración que desarrolla el móvil hasta detenerse.

8 Máximos y mínimos

31. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = 2x^3 - 5x$, **determina.**

a. La derivada de la función

b. Los valores críticos

c. Los valores extremos

d. El punto máximo y mínimo

e. La gráfica de la funció.

32. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = 5x^4 - 10x^3$, **determina.**

a. La derivada de la función

b. Los valores críticos

c. Los valores extremos

d. Los puntos máximo y mínimo

e. La gráfica de la función

9 Más a fondo

33. **Escribe** dos situaciones en la que se pueda intuir la definición de límite.

34. **Determina** el $\lim_{x \to 3} 2x - 5$ completando la siguiente tabla de valores aproximada.

x	...	2,98	2,99	3,01	3,02	...
$f(x)$	...					
$(x, f(x))$						

35. **Determina** el $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ completando la siguiente tabla de valores aproximada.

x	...	-0,9	-0,99	-1,01	-1,04	...
$f(x)$	...					
$(x, f(x))$						

36. **Calcula** el valor de los siguientes límites en forma numérica.

a. $\lim_{x \to 2} x - 3$

b. $\lim_{x \to -2} x + 2$

c. $\lim_{x \to -\frac{2}{3}} x + \frac{2}{3}$

d. $\lim_{x \to 2} -3$

e. $\lim_{x \to -5} (m^2 - 10)$

f. $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x+3}$

g. $\lim_{x \to 5} 2r^2$

h. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-3}{x+2}$

37. **Escribe** V si es verdadero o F si es falso, según corresponda

a. La expresión de la derivada por límites es ( )
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

b. La derivada de la función $f(x) = 2x^n$ es $f'(x) = n2x^n$ ( )

c. La notación de Euler para la derivada es $\frac{dy}{dx}$ ( )

d. Si $f'(x) > 0$ entonces la función es creciente. ( )

e. Si $f'(x) = 0$ entonces la función es decreciente. ( )

f. La primera derivada en la función de desplazamiento representa físicamente la velocidad media. ( )

g. Al calcular la segunda derivada en la función de desplazamiento determinamos la aceleración instantánea. ( )

h. Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$ se denominan valores críticos. ( )

i. Para determinar los extremos relativos reemplazamos los valores críticos en $f'(x)$. ( )

j. Al calcular la derivada de la función $f(x) = 2x^4 + 12$ resulta $8x^4$. ( )

38. Cuando se deriva $f(x) = x^2 - 5$ utilizando la expresión de límites, resolviendo el producto notable y reduciendo términos semejantes, resulta la expresión:

a. $\lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2 - 5}{h}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{h}$

c. $\lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{h}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{2xh - h^2}{h}$

39. Cuando se deriva $f(x) = 2x^3$ utilizando la expresión de límites, resolviendo el producto notable y reduciendo términos semejantes, resulta la expresión:

a. $\lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3xh - h^3 - 5}{h}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h}$

c. $\lim_{h \to 0} \frac{2x^2h + 2xh^2 - 2h^3}{h}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{2 + 6x^2 + 3xh - h^2}{h}$

40. Al derivar $f(x) = \sqrt{x}$, resulta:

a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d. $f: x \mapsto f(x) = 2\sqrt{x}$

Para finalizar

1. En $d: t \mapsto d(t) = 4t^2 + 8t - 2$, el valor de la aceleración instantánea es:

   a. $f(x) = -2$
   b. $f(x) = 10$
   c. $f(x) = 8$
   d. $f(x) = 0$

2. En $d(t) = 5t^2 + 10t - 12$, el valor de la aceleración instantánea cuando t = 2s es:

   a. $f(x) = 20\ m/s$
   b. $f(x) = 10\ m/s$
   c. $f(x) = 15\ m/s$
   d. $f(x) = 3\ m/s$

3. **Determina** la derivada en las siguientes funciones utilizando las reglas de la derivación.

   a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^2 + 15 - x$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{16\,x^2} + \sqrt{25x^4}$
   c. $f: x \mapsto f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 5x^{\frac{2}{5}} - 12$
   d. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$
   e. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{9x}}$

4. **Escribe** "V" inicial de Verdadero ó "F" inicial de Falso, según corresponda

   a. La primera derivada en la función de desplazamiento representa físicamente la velocidad media.
   b. Al calcular la segunda derivada en la función de desplazamiento se determina la aceleración instantánea
   c. Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x)=0$ se denominan valores críticos.
   d. Para determinar los extremos relativos se reemplazan los valores críticos en $f'(x)$.
   e. Al calcular la derivada de la función $f(x)=2x^4+12$resulta $8x^4$.
   f. La derivada de la función $f(x)=2x^n$ es $f'(x)=n2x^n$.
   g. Si $f'(x)>0$ entonces la función es creciente.
   h. Si $f'(x)=0$ entonces la función es decreciente.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SENTIDO CRÍTICO


http://goo.gl/kyk8M8

Proporción marginal al ahorro

La propensión marginal al ahorro dependerá, visto desde el punto de vista de factores endógenos al modelo, de la capacidad de ahorro que tenga la economía, y de la posibilidad que tenga esta. Se espera que (b) tenga un valor más alto en economías de mayor desarrollo. Matemáticamente, la función de la Propensión Marginal al Ahorro (PMA) se expresa como la derivada de la función de ahorro (S) respecto a la renta disponible (Y).

$$PMA = \frac{dS}{dY}$$

En otras palabras, la Propensión Marginal al Ahorro se interpreta como la cantidad en la que aumenta el ahorro de las familias cuando se produce un incremento de una unidad monetaria en la renta disponible, tomando valores entre 0 y 1. Es el concepto opuesto a la Propensión Marginal al Consumo (PMC). En un supuesto clásico de economía cerrada.

$$PMA = 1 - PMC$$

Y por tanto

$$PMA + PMC = 1$$

Así, en el ejemplo anterior, siendo la PMA de 0,35, ante un incremento de la renta disponible en una unidad monetaria, el individuo o familia ahorrará 35 centavos y gastará los 65 restantes.

Extraído 4 de abril del 2016
desde la página web: https://goo.gl/BBoMvG

SOCIEDAD

Costo Marginal

Se define como la variación en el costo total ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, es decir, es el costo de producir una unidad adicional. Matemáticamente se expresa como la derivada parcial del costo total respecto a la cantidad:

Costo Marginal = ∂Costo Total / ∂Cantidad
CMg = ∂CT / ∂Q

El costo marginal es un concepto fundamental en la teoría microeconómica, debido a que se utiliza para determinar la cantidad de producción de las empresas y los precios de los productos. El costo marginal depende de la tecnología utilizada en la producción y de los precios de los insumos y los factores de producción.

Extraído 4 de abril del 2016
desde la página web: http://goo.gl/4iKFME

SI YO FUERA....

Ingeniero en Finanzas

Podría determinar el valor S de un capital, en determinado número de años invertidos a una tasa anual r compuesta continuamente mediante la expresión $S = Pe^{rt}$.


https://goo.gl/qnZH6R

Proyecto

Elijo

ELIGIMOS



http://goo.gl/Nw1MrL

La derivada de una función halla plena aplicación en situaciones de potenciación económica en determinada empresa, donde a través de un conjunto de estrategias publicitarias que conlleven a una disminución económica en la cuota a cancelar mensualmente (sistema de planes de telefonía), se logre aumentar de manera considerable el número de clientes bajo esta modalidad de prestación de servicios de telefonía celular.

Bajo esta intención, se establecen por un lado variables inherentes a los clientes, como: el valor de disminución, el número de personas que aplican a esta disminución, y por ende, variables de gestión empresarial, como valores totales económicos de disminución por concepto de las promociones ofertadas y el número de clientes que se proyecta captar durante la temporada que conlleve la maximización de ingreso económico para la empresa.

12 Planifico

PLANIFICAMOS

La situación problemática se interpreta a través de un modelo matemático en el cual se establece una función de ingreso a partir de la cual, el ingreso económico para determinada empresa sea máximo. Consideremos "promociones" difundidas en los diferentes medios de comunicación y en determinada temporada durante el año, misma que se interpreta en un intervalo cerrado. Para analizar la situación propuesta, sugerimos el siguiente proceso:

Primero: Establecer variables

d = Número de disminuciones

v = Valor de disminución

n = Número de clientes

N = Número de clientes nuevos

c = Cuota de pago mensual

C = Cuota modificada mensual

I = Función de ingreso económico

Segundo: Establecer la función de ingreso económico relacionando las variables así como las condiciones:

I = (número de clientes totales) · (cuota modificada mensual)

$$I = (n + N \cdot d) \cdot (c - v \cdot d)$$

Tercero: Derivar la función obtenida al reemplazar los diferentes valores

$I' = (n + N \cdot d) \cdot (c - v \cdot d)$

Cuarto: Maximizar la función, calculando el valor numérico en puntos referenciales

Sea el dominio: (a, c) y determinar I´ (a), I´ (d) , I´ (c)

D| Desarroll

DESARROLLAMOS

La empresa de telefonía Comunicatel dispone actualmente de 50 000 clientes, que pagan por un plan básico celular, una cuota de 30 dólares. Según datos obtenidos en una encuesta realizada en temporada navideña, se podría captar 5 000 clientes potenciales, si disminuimos la cuota en 0,25 centavos por cada cliente potencial. ¿Para qué valor de cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos clientes se tendrían con tal cuota?

Determina.

a. La cuota mensual modificada

b. El número total de clientes

c. El dominio de la función

–Sugerencias: Despejar d en la cuota mensual unificada luego de igualar a cero.

d. La función de ingreso económico

–Sugerencias:
- Resolver el factor común numérico en el primer factor
- Aplicar la propiedad distributiva entre los paréntesis
- Derivar (Factor común) (Expresión obtenida en el paso anterior)

e. La derivada de la función de ingreso económico

f. El número de disminuciones

–Sugerencia: Igualar a cero Resolver el factor común numérico en el primer factor

g. El ingreso máximo económico

–Sugerencias: Evaluar $I(0)$, $I(d)$, $I(120)$

h. ¿Cuándo ocurre el ingreso máximo?

i. ¿Cuál es el valor económico que la empresa asume como concepto de disminución?

j. ¿Cuál es el valor de la cuota mensual modificada a ser cancelada por los clientes?

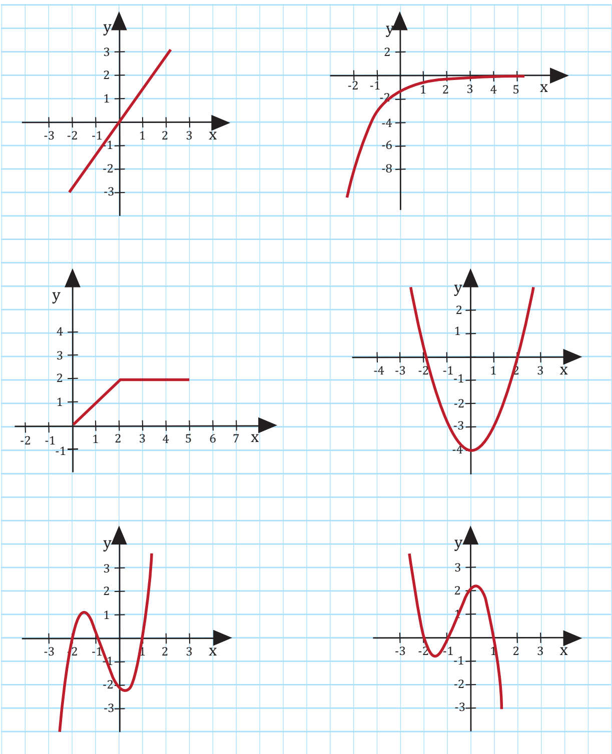
k. ¿Cuántos clientes nuevos se captaron?

l. ¿Cuál es el total de clientes ?

m. ¿Cuál es ingreso económico que tendría la empresa?

Un alto en el camino

1. Sean las gráficas A y B, **contesta** las siguientes preguntas:



a. ¿Qué tipo de funciones son?
b. ¿Cuál es el dominio en cada una de las gráficas?
c. ¿Cuál es el recorrido en cada una de las gráficas?
d. ¿Qué función es inyectiva? utilizando el método gráfico
e. ¿Qué función es sobreyectiva? utilizando el método gráfico
f. ¿Todas las funciones tienen inversa? ¿Por qué?
g. ¿En qué intervalos las funciones son crecientes? ¿Y decrecientes?
h. ¿Cuáles funciones son estrictamente crecientes?

2. El desplazamiento en metros de un deportista de élite se expresa mediante: $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t$, donde t es expresada en segundos.

a. ¿Cómo se obtendrá la expresión que permita evaluar la velocidad del deportista?
b. ¿Cuál es la expresión?
c. Si deseo conocer, la velocidad a la cual se desplaza a los 3 segundos. ¿Qué proceso se debe realizar?
d. ¿Cómo se podría determinar la expresión que permita calcular la aceleración que desarrolla el deportista?
e. ¿Cuál es la aceleración del deportista en el instante cuando $t = 5$ segundos?

3. **Verifica** si las siguientes funciones son inyectivas utilizando el análisis algebraico, gráfico y de tabla de valores.

a. $g: x \mapsto g(x) = -3x + \sqrt{2}$
b. $f: x \mapsto f(x) = -\dfrac{x^2}{6} + 5$
c. $h: x \mapsto h(x) = \sqrt{x+2} - \pi$

4. Dadas las funciones, **realiza** la representación gráfica y **determina** si son biyectivas analizando el criterio algebraico, numérico y gráfico.

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x + e$
b. $f: x \mapsto f(x) = -\dfrac{2x}{5} - 4$
c. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-5} + 2\pi$

5. Responde V si es verdadero o F si es falso, según corresponda.

a. Las funciones inversas se verifican mediante el concepto de composición de funciones.

b. El quinto término de la progresión: $2, 1, \frac{1}{2}$,... es $\frac{1}{4}$, ...

c. La función inyectiva se verifica gráficamente por dos punto de intersección con la línea vertical.

d. Todas las funciones biyectivas son inyectivas.

e. La función f: A⟶B es sobreyectiva cuando el Rec $f = A$.

f. La función tangente es inyectiva.

g. La función $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}\ (2x)$ es una traslación.

h. La función tangente tiene asíntotas.

i. La función $f: x \mapsto f(x) = -\tan(x)$ es una reflexión.

6 **Escoge** la opción correcta.

- ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f: x \mapsto f(x) = -3x + 15$?

a. $g(x) = \frac{x}{3} + 5$ c. $g(x) = \frac{-x' + 5}{3}$

b. $g(x) = \frac{x}{3} + 5$ d. $g(x) = \frac{x}{3}$

- Al interpretar la función $f(x) = -\cos(x - 2)$

a. Se mueve 2 unidades a la derecha y se refleja sobre el eje x.

b. Se mueve 2 unidades hacia arriba y se refleja sobre el eje y.

c. Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje x.

d. Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje y.

- En la progresión $2m + 5$; $m + 2$; -1; $-m-4$... La diferencia es:

a. $m + 3$ b. $-m - 3$ c. $m - 3$ d. $-m + 3$

- La suma de los términos de la progresión aritmética del ejercicio anterior es:

a. $2m + 2$ b. $-m + 5$ c. 2 d. m

7 **Halla** las dos cantidades a_n, a, n, d, o s_n que faltan en cada uno de los problemas.

a. $a_1 = -\frac{4}{5}$, $d = -\frac{3}{5}$, $S_n = -\frac{116}{5}$

b. $a_n = 16$, $d = 3$; $s_n = 51$

8 Sean $f: x \mapsto f(x) = 7x^2 - 5$; $g: x \mapsto g(x) = x^2 - 2x$; $h: x \mapsto h(x) = \sqrt{(x+2)}$, **halla**.

a. $f \circ g$ c. $(h \circ f)(1)$

b. $(f \circ g)(-3)$ d. $h \circ f$

9 **Determina** $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para cada par de funciones.

a. $f(x) = 14x + 4$; $g(x) = \frac{x}{7}$

b. $f: x \mapsto f(x) = 4x^2$; $g(x) = 2\sqrt{4x}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+2}$; $g(x) = x - 2$

10 En $d(t) = 8t^2 + 2t$, el valor de la aceleración instantánea (a) es:

a. $a = -2$ c. $a = 8$

b. $a = 16$ d. $a = 0$



4 Vectores en $\mathbb{R}^2$

CONTENIDOS:



http://goo.gl/jOmU3a

Libros

Como puedes leer en el siguiente fragmento del libro *Iniciación a la aeronáutica* de Antonio Creus Solé, los vectores desempeñan un papel fundamental en la navegación aérea:

«En vuelo sin viento, la ruta sobre el suelo descrita por el avión es igual al rumbo. El viento desplazará el avión de su rumbo y la ruta verdadera descrita sobre el suelo diferirá del rumbo mantenido.

El viento puede ser representado por un vector definido por su dirección y su velocidad. La dirección del viento es la dirección de la que viene el viento, no a la que apunta el viento. De este modo, un viento de 180° 10 nudos significa un viento que viene del sur y de intensidad 10 nudos.

Para dibujar la ruta verdadera del avión se dibuja el llamado *triángulo de velocidades*. Para ir de un punto A a otro B se dibuja una recta que los une sobre el mapa. A continuación, se traza sobre ella, partiendo del punto A, la velocidad verdadera del avión (TAS) y el viento estimado de 210° 20 nudos (el viento viene de 210°) y se unen los extremos de los dos vectores».

Web

Robin Cook escribió en 1999 una novela titulada Vector que trata sobre el peligro de las armas bacteriológicas.

En la siguiente página http://links.edebe.com/h6dd, podrás ampliar la información sobre el autor y su bibliografía.

EN CONTEXTO

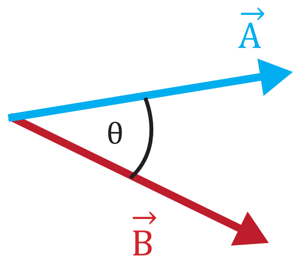
a. ¿Por qué crees que se utiliza un vector para representar el viento? ¿Se te ocurren otros fenómenos físicos que deban ser representados con vectores?

- **Anota** en una lista varios fenómenos físicos que se representen con vectores.
- **Busca** en Internet, como mínimo, tres fenómenos físicos más que también se representen con vectores, y resumidlos brevemente.
- **Pon** en común en clase los fenómenos físicos que hayas encontrado.

b. **Busca** información en Internet sobre los vectores biológicos y las enfermedades transmitidas por vectores. ¿Qué relación tienen con el libro de Robin Cook? ¿Por qué crees que se utiliza el término vector para definirlas?

1. VECTORES EN $\mathbb{R}^2$

1.1.Producto escalar entre dos vectores



Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el ángulo de separación entre ellos.

Fig. 1.

El producto escalar o tambien conocido como producto punto, entre dos vectores, es un número real que se obtiene al multiplicar los módulos de los vectores considerados entre sí, por el coseno del ángulo formado entre estos vectores.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cos\theta$$

El producto punto toma su nombre debido a su representación «un punto» entre los vectores relacionados en la operación.

Ejemplo 1

Determinemos el producto escalar con los vectores

$\vec{A} = (4\vec{i} + 4\vec{j})$ y $\vec{B} = (-3\vec{i} + \vec{j})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (4\,\vec{i}\cdot -3\vec{i}) + (4\,\vec{i}\cdot\vec{j}) + (4\,\vec{j}\cdot -3\vec{i}) + (4\vec{j}\cdot\vec{j})$ Reemplazo

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (-12) + \underbrace{(4\,\vec{i}\cdot\vec{j})}_{0} + \underbrace{(4\,\vec{j}\cdot -3\vec{i})}_{0} + (4)$ Prop. Distributiva

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (-12+4)$ Resolución

$\vec{A}\cdot\vec{B} = -8$

Observaciones:

El producto escalar de los vectores unitarios rectangulares es:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \text{ o viceversa } \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \text{ o viceversa } \vec{j}\cdot\vec{j} = 1$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Vectores base

Al expresar un vector en coordenadas de vectores base, se designa las letras:

i para la componente del vector en x.

j para la componente del vector en y.

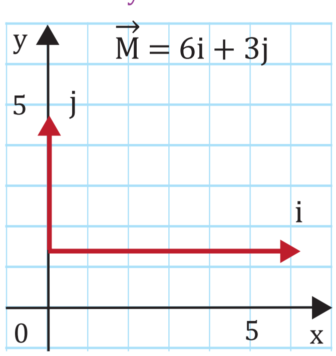


Fig. 2.

Ejemplo 2

Determinemos el producto escalar entre:

$\vec{A} = (-\vec{i} - 9\vec{j})$ y $\vec{B} = (-2\,\vec{i} - 6\,\vec{j})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (-\vec{i}\cdot -2\vec{i}) + (-9\,\vec{j}\cdot -6\vec{j})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (2) + (54)$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 56$

Actividades

1. **Determina** el producto escalar solicitado siendo $\vec{A} = (-2\vec{i} + 3\vec{j})$; $\vec{B} = (-1\vec{i} + 9\vec{j})$; $\vec{C} = (+3\vec{i} - 2\vec{j})$; $\vec{D} = (-2\vec{i} + 2\vec{j})$

a. $\vec{A}\cdot\vec{B}$

b. $\vec{B}\cdot\vec{C}$

c. $\vec{A}\cdot\vec{A}$

g. $\vec{B}\cdot\vec{D}$

d. $\vec{B}\cdot\vec{B}$

e. $\vec{C}\cdot\vec{C}$

f. $\vec{A}\cdot\vec{D}$

h. $\vec{D}\cdot\vec{D}$

1.2.Producto escalar de un vector por si mismo

Dados el vector:

$\vec{B} = (5; 8)\text{m}$ .Determinamos el producto punto utilizando la definición de producto punto.

Sean:

El vector $\vec{B} = (5; 8)\text{m}$

Producto Escalar de un vector por sí mismo

> El producto escalar entre dos vectores iguales, es igual al cuadrado el módulo del vector dado.

Ejemplo 3

Dados el vector $\vec{B} = (5 ; 8)\text{m}$ determinemos el producto punto de sí mismo B^2.
Cálculamos la magnitud
Aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene:

$||\vec{B}|| = \sqrt{Bx^2 + By^2})$

$||\vec{B}|| = \sqrt{5^2 + 8^2}$

$||\vec{B}|| = \sqrt{25 + 64}$

$||\vec{B}|| = \sqrt{89}$; $||\vec{B}|| \approx 9{,}43$

Entonces el producto punto es: $||\vec{B}||^2 = 89$

Hallamos B^2 :

$B^2 = (5; 8) \cdot (5; 8)$

$B^2 = (25 + 64)$

$B^2 = 89$

1.3. Propiedades del producto escalar

El producto escalar cumple con la propiedad conmutativa, Es decir:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Además cumple con la propiedad distributiva con relación a la suma de vectores.

$\vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$

Se verifica que el resultado es igual al calcular mediante la magnitud elevada al cuadrado.

Actividades

2. Dados los vectores : $A = (3\vec{i} + \vec{j})\text{cm}$; $B = (\vec{i} + 2\vec{j})\text{cm}$; $C = (2\vec{i} + \vec{j})$ cm. **Determina**.
   a. $\vec{A} \cdot \vec{B}$
   b. $\vec{C} \cdot \vec{A}$
   c. $\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}$
   d. **Demuestra** que: $\vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$

Y TAMBIÉN ¿?

Vectores iguales

Al disponer de dos vectores que son iguales se concluye que el ángulo que forman entre ellos es $0°$.
Además $A = B$ debido a que son iguales.
Se tiene entonces:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos 0°$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{A}|| \cdot (1)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}||^2$

1.4. Vectores Perpendiculares

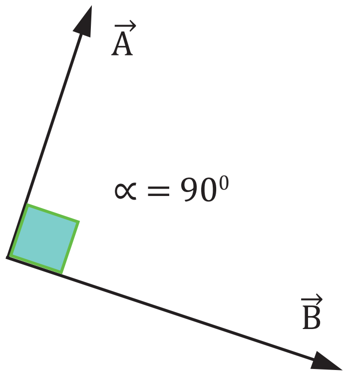


Fig. 3.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||\cdot\cos\theta$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||\cdot\cos 90^0$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||\cdot(0)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

Dos vectores son perpendiculares cuando forman un ángulo recto (90°) y se cortan en un punto. Por lo tanto, aplicando el producto escalar entre estos dos vectores perpendiculares, el resultado obtenido es cero.

Ejemplo 4

Identifiquemos si los siguientes vectores son perpendiculares entre sí. Realizamos un bosquejo referencial del caso.

$$\vec{A} = (4\vec{i} - 7\vec{j})m \ \ y \ \ \vec{B} = (14; 8)m$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AxBx + AyBy$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (4)(14) + (-7)(8)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 56 - 56$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

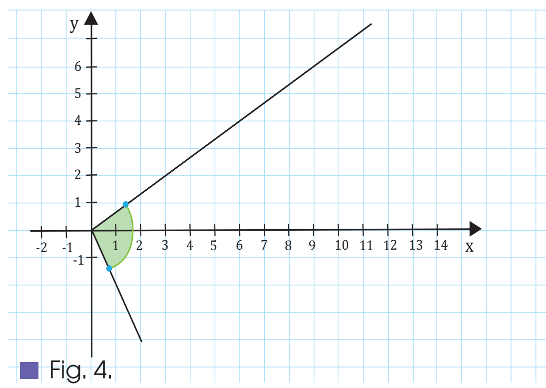


Fig. 4.

Representan dos vectores perpendiculares porque el producto escalar es igual a cero.

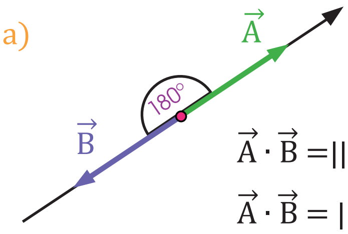
Actividades

3. De los siguientes vectores ¿Cuál es perpendicular al vector $\vec{D} = (6Km/h; 30°)$?
   a. $\vec{E} = (8km/h; 90°)$
   b. $\vec{F} = (12km/h; 0°)$
   c. $\vec{G} = (5km/h; 120°)$

4. De los siguientes vectores ¿Cuál no es perpendicular al vector $\vec{A} = (8\vec{i} - 20\vec{j})m$?
   a. $\vec{E} = (5\vec{i} + 2\vec{j})m$
   b. $\vec{F} = (2\vec{i} + 5\vec{j})m$
   c. $\vec{G} = (2{,}5\vec{i} + \vec{j})m$

1.5. Vectores Paralelos

a)



$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos \theta$

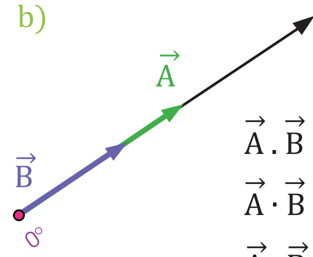
$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos 180^{0}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot (-1)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = -||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}||$

Fig. 5.

b)



$\vec{A} . \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos \theta$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos 0°$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot (1)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||A|| \cdot ||B||$

Fig. 6.

Dos vectores son paralelos cuando sobre una línea de acción, se forma un ángulo de 0° o de 180°. El producto escalar de dos vectores paralelos es igual al producto de sus módulos.

Además, las componentes cartesianas de dos vectores paralelos son proporcionales.

$\vec{A} . \vec{B} = AxBx + AyBy$

$$AxBy = AyBx$$

Ejemplo 5

Identifiquemos si los siguientes vectores $A = (4\vec{i} + 5\vec{j})$ m y $B = (6\vec{i} + 7{,}5\vec{j})$ m son paralelos.

Aplicamos la relación de proporcionalidad.

$AxBy = AyBx$

$(4)(7{,}5) = (5)(6)$

$30 = 30$ Verdadero

Estos vectores sí son paralelos.

Actividades

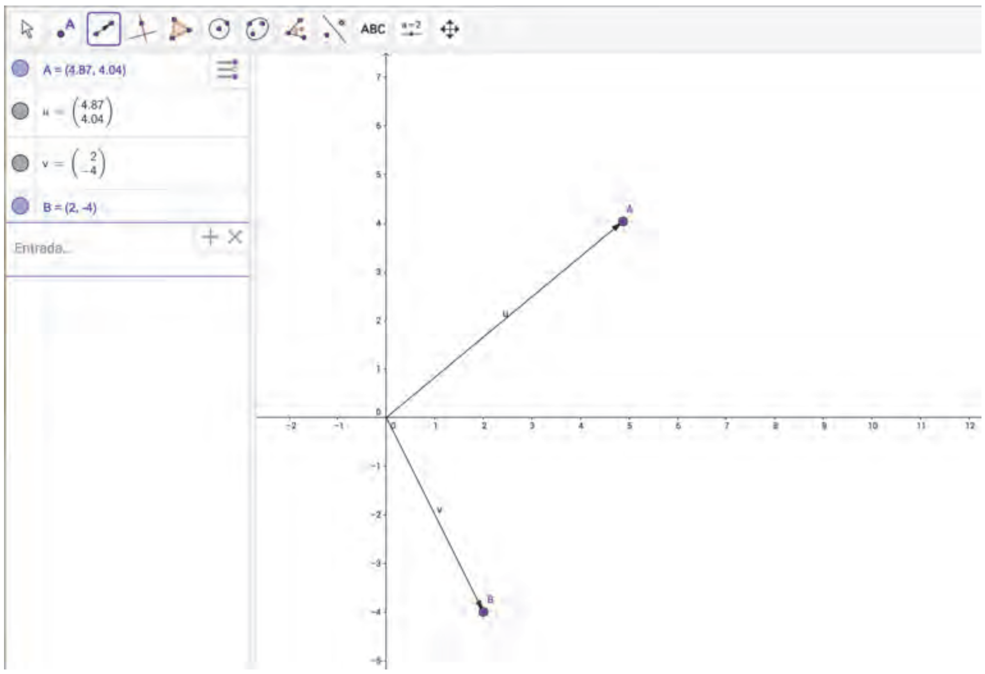
5. Los vectores paralelos son aquellos que se grafican en:
   a. Un ángulo recto
   b. Un ángulo agudo
   c. Un ángulo de 180°
6. **Escribe** un vector paralelo al vector $\vec{A} = (5m; 60°)$.
7. **Escribe** un vector paralelo al vector $\vec{A} = (8\vec{i} - 5\vec{j})$.

1.6. El uso de las TIC y los vectores

Utilizando el programa Geogebra se facilita el gráfico e identificación de vectores perpendiculares.

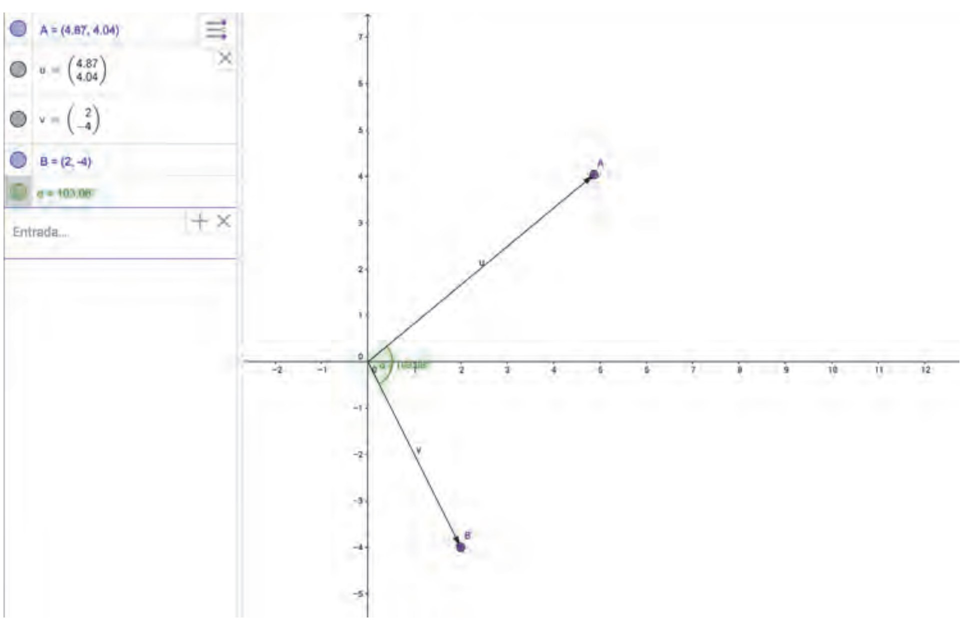
Cuando tenemos los dos vectores:

$\vec{A} = (5\vec{i} + 4\vec{j})m$ y $\vec{B} = (2\vec{i} - 5\vec{j})m$



https://goo.gl/ntscG2

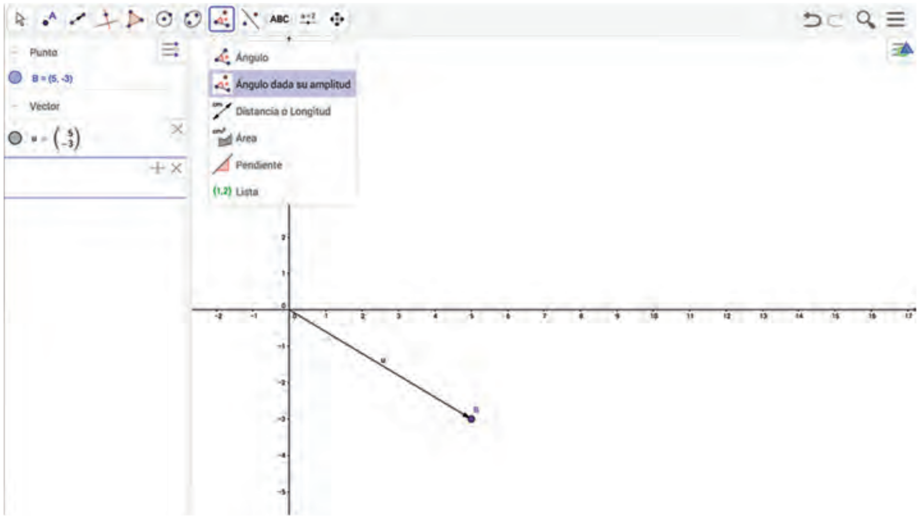
Se puede identificar su perpendicularidad o no, calculando el ángulo de inclinación entre los dos vectores. Para ello damos click en la opción ángulo.



https://goo.gl/ntscG2

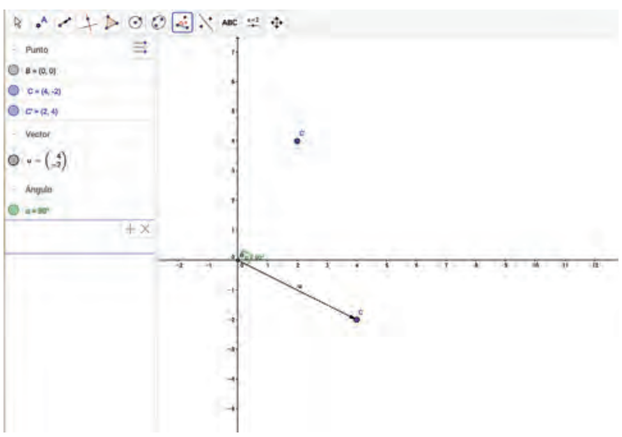
Así mismo se puede conocer el lugar donde se va a graficar un vector perpendicular; calculando el ángulo de inclinación, partiendo de un vector conocido $A = (5\vec{i} - 2\vec{j})m$

Usando la opción de ángulo conocida su amplitud

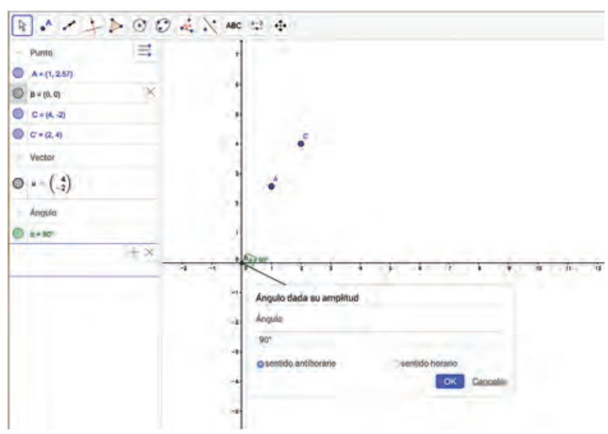


https://goo.gl/ntscG2

Identificando un punto del vector y el punto del origen identificamos el ángulo que deseemos, en este caso, 90°.

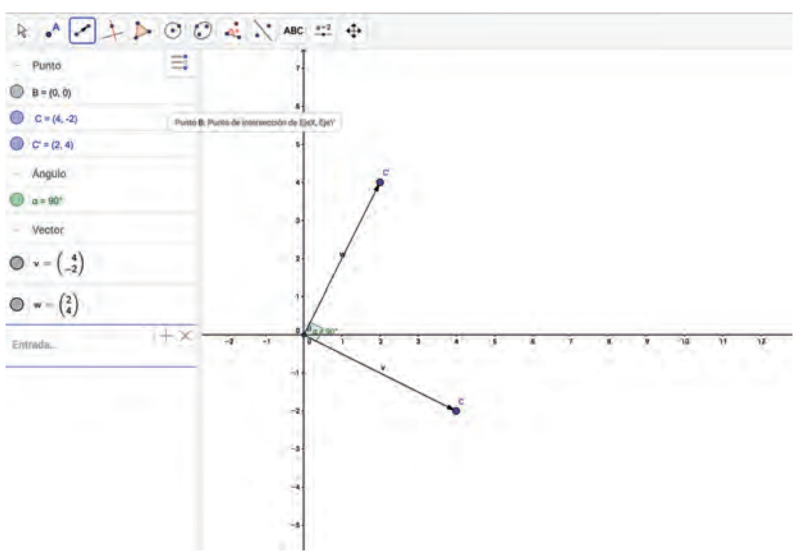


https://goo.gl/ntscG2



https://goo.gl/ntscG2

Unimos el punto de origen con el punto que identifica la perpendicular.



https://goo.gl/ntscG2

1.7. Norma de un vector

La norma de un vector se puede identificar como la distancia del punto final al origen; se encuentra calculando la raíz cuadrada de las variaciones de cada componente al cuadrado. Por consiguiente, la relación de la norma de un vector en $\mathbb{R}^2$ (dos dimensiones) será:

Sean los vectores $\vec{v} = (vx, vy)$; $\vec{u} = (ux, uy)$ $\Rightarrow$ $d(\vec{v} - \vec{u}) = \sqrt{(vx - ux)^2 + (vy - uy)^2}$

Considerando que el origen es el punto $\vec{O}$ (0,0), la relación quedaría expresada por:

$$d(\vec{v} - \vec{u}) = d(\vec{v} - \vec{0}) = \sqrt{(vx - 0)^2 + (vy - 0)^2}$$

La Norma o magnitud de un vector se representa por «|| ||»

Ejemplo 6

Identifiquemos la norma o magnitud de los siguientes vectores:
$\vec{A} = (6m; 35°)$; $\vec{B} = (3\vec{i} - 4\vec{j})$ m; $\vec{C} = (7\vec{i} + 2\vec{j})$; cuando su punto de origen es $\vec{D}$ (3; -4)
En el vector $\vec{A} = (6m; 35°)$ norma del vector es 6m, debido a que se expresa en coordenadas polares.

En el vector $\vec{B}$:

$\vec{B} = (3\vec{i} - 4\vec{j})$ m

$||\vec{B}|| = \sqrt{Bx^2 + By^2}$

$||\vec{B}|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$

$||\vec{B}|| = \sqrt{9+16}$

$||\vec{B}|| = \sqrt{25}$

$||\vec{B}|| = 5m$

En el vector $\vec{C}$:
$\vec{C} = (7\vec{i} + 2\vec{j})$; cuando su punto de origen es $\vec{D}(3; -4)$
Realizamos el cálculo punto final menos punto inicial.

$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{(Cx\text{-}Dx)^2 + (Cy\text{-}Dy)^2}$

$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2\text{-}(-4)^2)}$

$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{(4)^2 + (6)^2)}$

$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{16 + 36}$

$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{52}$

Actividades

8. **Encuentra** la norma de los siguientes vectores:
   a. $\vec{u} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{v} = (-4, 3)$ y $\vec{w} = (8, -8)$
   b. De $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, siendo A(6, 0), B(3,5), C(-1, -1).
9. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u} = (2, -5, 4)$ y $\vec{v} = (-1, -3, 6)$. **Calcula**:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $|\vec{u}|$ c. $|\vec{v}|$ d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
10. **Halla** el valor de k para que $\vec{u} = (1, k, 2k)$ tenga módulo 9.
11. Las componentes de en una base ortonormal son $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 7, -1)$. **Calcula**:
    a. $|\vec{u} + \vec{v}|$ b. $|\vec{u} - \vec{v}|$ c. $|3\vec{u} - 2\vec{v}|$
12. **Determina** un vector unitario que sea paralelo a $\vec{v} = (2, 6, -3)$ y un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{u} = (3, 2, -1)$.
13. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una base ortonormal son $\vec{u} = (1, -1, 7)$, $\vec{v} = (-2, 0, 5)$ y $\vec{w}$ (3, -3, 2). **Halla.**
    a. $2\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$
    b. $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})$
    c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$
    d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

1.8. Distancia entre dos puntos

Para calcular la distancia entre dos puntos en el espacio, es necesario representar ese espacio por medio de un vector y calcular la norma de este vector; considerando que la mayoría de veces el origen no empieza en el punto $O\ (0{,}0)$; considerando los puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ y aplicando la relación estudiada anteriormente, obtenemos:

Sean los vectores $\vec{v} = (\ vx, vy\ )\ ;\ \vec{u} = (\ ux, uy)\ \Rightarrow$ $d(\vec{v} - \vec{u}) = \sqrt{(vx - ux)^2 + (vy - uy)^2}$

Con otra notación sería: $d(b - a) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Sean los vectores $a = (\ x_2, y_2\ )\ ;\ b = (\ x_1, y_1)\ \Rightarrow$ $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Ejemplo 7

Un corredor sale del punto $(-3; 5)$ m y dentro de dos minutos llega al punto $(5; -6)$. Determinemos.

a. Distancia total recorrida

b. Distancia promedio recorrida por minuto

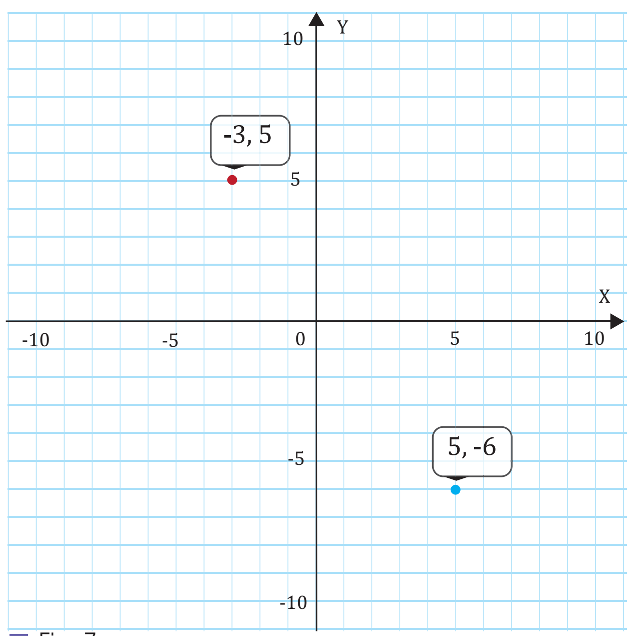


Fig. 7.

a. Distancia total recorrida

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (5 - (-6))^2}$

$d = \sqrt{(-8)^2 + (11)^2)}$

$d = \sqrt{64 + 121}$

$d = \sqrt{185}$

$d = 13{,}60$

b. Distancia promedio recorrida

$dm = \dfrac{d}{t}$

$dm = \dfrac{13{,}60}{2}$

$dm = 6{,}80$ metros cada minuto

Actividades

14. **Calcula** la distancia de los puntos $A = (2, 3, -1)$ y $B = (1, 4, 0)$ a la recta $r : (x, y, z\ ) = (1, 3, -2) + k\ (1, 0, 1)$.

15. Sea el triángulo determinado por los puntos $A = (1, 4, -1)$, $B = (0, 0, 1)$ y $C = (1, 3, 1)$. **Halla** la distancia del punto B a la recta determinada por A y C. A continuación, calcula el perímetro y el área de este triángulo.

1.9. Ángulo entre dos vectores

El ángulo comprendido entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se calcula utilizando la definición del producto escalar, representado en coordenadas cartesianas, y el producto de sus magnitudes.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||} \qquad \cos\theta = \frac{AxBx + AyBy}{||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||}$$

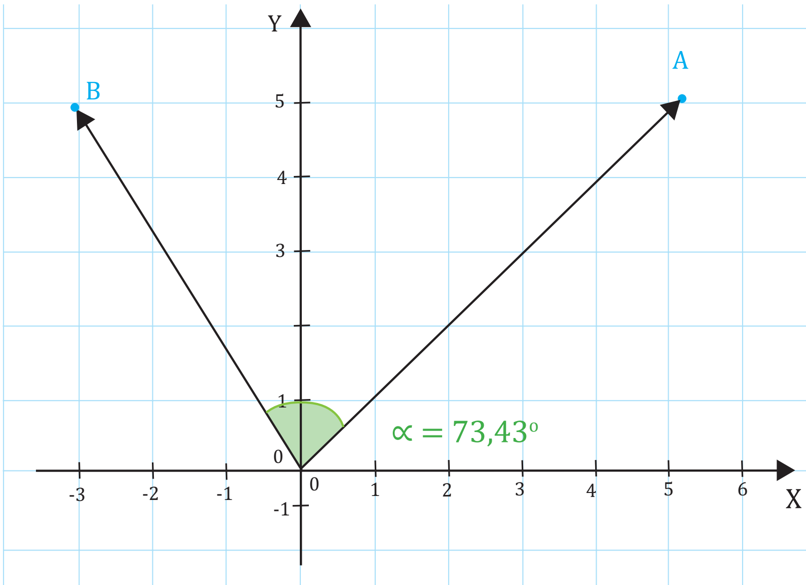


Fig. 8

Ejemplo 8

Calculamos el ángulo comprendido entre los siguientes vectores: $\vec{A} = (3\vec{i} + 4\vec{j})m$ y $\vec{B} = (2\vec{i} - \vec{j})$ m.

Primero: Encontramos el módulo o magnitud de cada vector.

$||\vec{A}|| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$ $\qquad$ $||\vec{B}|| = \sqrt{Bx^2 + By^2}$

$||\vec{A}|| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2)}$ $\qquad$ $||\vec{B}|| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$

$||\vec{A}|| = \sqrt{9 + 16}$ $\qquad$ $||\vec{B}|| = \sqrt{4 + 1}$

$||\vec{A}|| = \sqrt{25}$ $\qquad$ $||\vec{B}|| = \sqrt{5}$

$||\vec{A}|| = 5$ m $\qquad$ $||\vec{B}|| = 2{,}24$ m

Segundo: Aplicamos la relación correspondiente, con su respectiva gráfica.

$$\cos\theta = \frac{AxBx + AyBy}{||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||}$$

$$\cos\theta = \frac{(3)(2) + (4)(-1)}{(5)(2{,}24)}$$

$$\cos\theta = \frac{6 - 4}{11{,}2}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{11{,}2}$$

$$\cos\theta = 0{,}18$$

$$\theta = 79{,}71^{o}$$

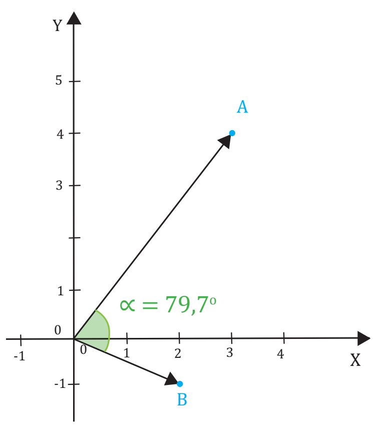


Fig. 9.

Ejemplo 9

Calculemos el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A} = (-5; 3)m$ y $\vec{B} = (7m; 27°)$

Primero: Calculamos las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$||\vec{A}|| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2)}$$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{25 + 9}$$

$$||\vec{A}|| = \sqrt{34}$$

$$||\vec{A}|| = 5,83\ m$$

La magnitud del vector $\vec{B}$ es 7

Segundo: Expresar el vector B en coordenadas cartesianas.

$Bx = B \cos \theta$ $\quad$ $By = B\ sen\ \theta$

$Bx = 7m \cos 27°$ $\quad$ $Bx = 7m\ sen\ 27°$

$Bx = 6,24\ m$ $\quad$ $Bx = 3,18\ m$

$\vec{B} = (6,24\ ;\ 3,18\ )m$

Tercero: Aplicamos la relación correspondiente, con su respectiva gráfica.

$$Cos\ \theta = \frac{AxBx + AyBy}{||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}||}$$

$$Cos\ \theta = \frac{(-5)(6,24)+(3)(3,18)}{(5,83)(7)}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-31,2 + 9,54}{40,81}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-21,66}{40,81}$$

$$Cos\ \theta = -0,53075$$

$$\theta = 122,06\ °$$

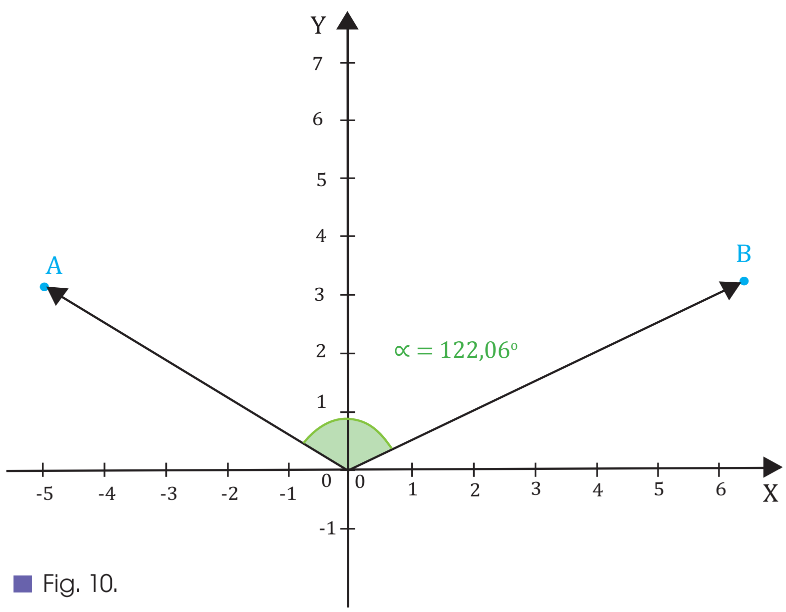


Fig. 10.

Actividades

16. ¿Cuál es el ángulo comprendido entre los siguientes vectores?

$\vec{A} = (7\vec{i} - 4\vec{j})m$ y $\vec{B} = (5\vec{i} + 2\vec{j})m$

$\vec{C} = (-5\vec{i} + \vec{j})Km/h$ y $\vec{D} = (-8\vec{i} - 12\vec{j})$

$\vec{E} = (6m; 30°)$ y $\vec{F} = (2\vec{i} + 7\vec{j})m$

2. ECUACIONES DE LA RECTA

2.1 Ecuación cartesiana de la recta (Forma explícita)

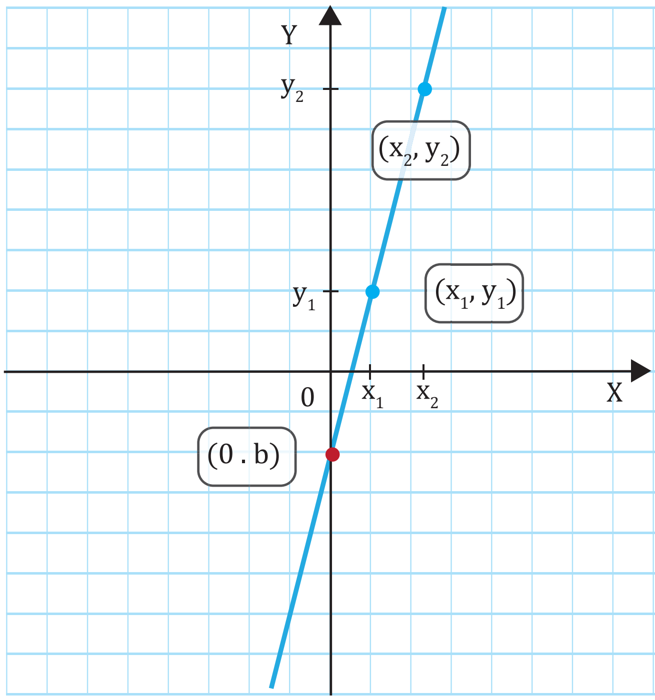


Fig. 11.

La ecuación cartesiana describe a la recta mediante los siguientes elementos:

- Pendiente; descrita por m, representa el grado de inclinación de la recta.

Es el cociente entre la variación de la variable y y la variación de la variable x.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Intersección; se refiere al punto de corte entre la recta y el eje de las ordenadas (eje y); se representa por b y se obtiene con la relación:

$$b = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2 - x_1}$$

Así, la recta en su forma cartesiana o explícita es :

$$y = mx + b$$

Ejemplo 10

Dados $A = (5; 3)$ y $B = (7; 5)$, determinemos la ecuación explícita de la recta.

Primero: Determinamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - 3}{7 - 5}$$

$$m = \frac{2}{2}$$

$$m = 1$$

Segundo: Calculamos el valor de la intersección

$$b = \frac{x_2 . y_1 - x_1 . y_2}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{(7)(3) - (5)(5)}{7 - 5}$$

$$b = \frac{21 - 25}{2}$$

$$b = \frac{-4}{2}$$

$$b = -2$$

Con los elementos m y b, la ecuación explícita de la recta es : $y = x - 2$

2.2. Ecuación de la recta en la forma paramétrica

La ecuación paramétrica se expresa en función de las componentes de dos de los puntos de la recta, con la relación de un parámetro, que se puede simbolizar por «p».

La expresión paramétrica de la recta descrita en los ejes respectivos es :

En el eje x : $x = x_1 + p\,(x_2 - x_1)$

En el eje y : $y = y_1 + p\,(y_2 - y_1)$

A continuación, ilustramos un ejemplo en el cual analizaremos la ecuación paramétrica de la recta en función de sus respectivas ecuaciones.

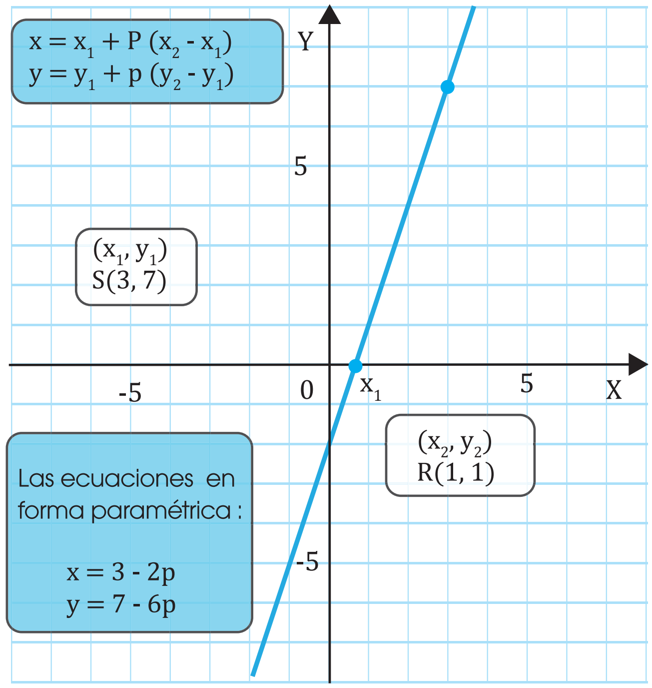


Fig. 12.

Ejemplo 11

Dada la ecuación que se expresa mediante : $\left.\begin{array}{l} x = p - 5 \\ y = 3p + 2 \end{array}\right\}$

Donde p es un número real.

1. **Determina** los puntos determinados por $p = ,..., -2, -1, 0, 1$ y 2.

   Análisis numérico

x	x= p - 5	y = 3p + 2	(x, y)
-2	-7	-4	(-7, -4)
-1	-6	-1	(-6, -1)
0	-5	2	(-5, 2)
1	-4	5	(-4, 5)
2	-3	8	(-3, 8)

2. Determinemos la relación algebraica entre x e y.

   Análisis algebraico

   Despejamos el parámetro «p» de la primera ecuación y reemplazamos en la otra ecuación.

$$y = 3(x + 5) + 2$$
$$y = 3x + 15 + 2$$
$$y = 3x + 17$$

3. Representemos gráficamente la relación algebraica entre x e *y*.

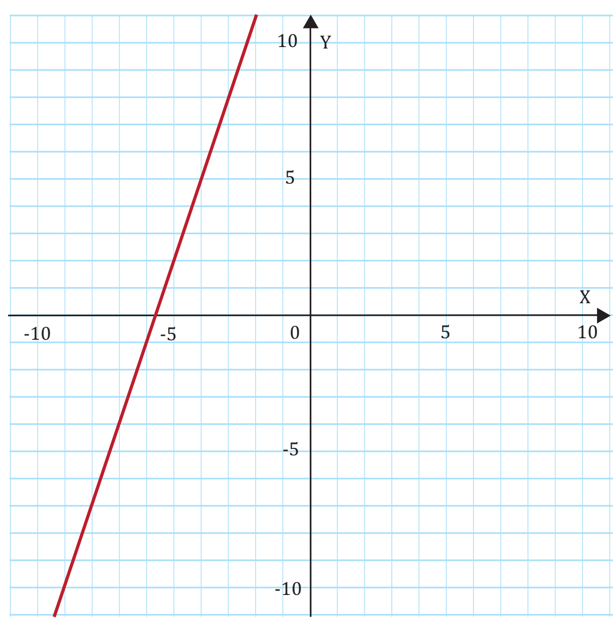


Fig. 13.

2.3. Ecuación de la recta en la forma vectorial

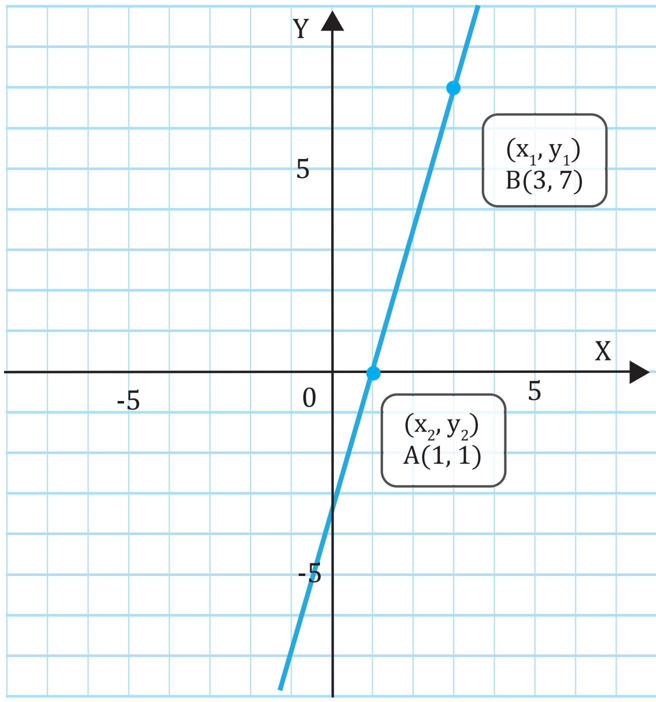


Fig. 14.

La ecuación vectorial, expresa a una recta en vectores base, es decir, en sus componentes incluye los vectores directores (i, j). Describe la recta según los elementos.

- Vector origen: Comprendido entre el origen de coordenadas y el punto A (OA).
- Parámetro: Se refiere a un valor numérico constante (|p|).
- Vector de dirección: Se constituye por la variación entre el punto final menos el punto inicial ($\overrightarrow{AB}$).

La ecuación vectorial de la recta, conocidos dos de sus puntos, es :

$$(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{OA} + p\,(\overrightarrow{AB})$$

Ejemplo 12

Sean los puntos A (1, 1) y B (3, 7). Determinemos le ecuación de la recta en forma vectorial.

Primero: Determinamos el vector origen, mediante la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O}\,;\ \overrightarrow{OA} = (\vec{i} + \vec{j}) - (0\vec{i} + 0\vec{j})\ ;\ \overrightarrow{OA} = (\vec{i} + \vec{j})$$

Segundo: Determinamos el vector dirección mediante te la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}\,;\ \overrightarrow{AB} = (3\vec{i} + 7\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j})\ ;\ \overrightarrow{AB} = (2\vec{i} + 6\vec{j})$$

Tercero: Reemplazamos los elementos en la ecuación vectorial, por lo tanto.

$$\left.\begin{aligned}(\overrightarrow{OX}) &= \overrightarrow{OA} + p\,(\overrightarrow{AB})\\ (\overrightarrow{OX}) &= (\vec{i} + \vec{j}) + p\,(2\vec{i} + 6\vec{j})\end{aligned}\right\}$$

Actividades

17. Dados los puntos A(3, 2) y B(-1, -3), **determina** la ecuación de la recta en forma explícita.
18. Dada la ecuación que se expresa mediante :

    $x = p + 8$; $y = 2p - 11$, donde p es un número real, **determina:**

    a. Los puntos determinados por : .... - 3,-2,-1,0,1, 2 y 3.

    b. La relación algebraica entre x e y.

    c. La gráfica de la función.

2.4. Transformación de la forma explícita a las formas paramétrica y vectorial

Las formas de expresar una recta pueden relacionarse según los elementos ya descritos en apartados anteriores. Partiendo desde la ecuación de la recta en forma explícita: $y = mx + b$, recordamos que sus elementos correspondientes son pendiente (m) e intersección con el eje y (b).

Así entonces, para expresar la ecuación de la recta desde su forma explícita a la forma paramétrica, debemos obtener dos puntos de referencia, para lo cual es conveniente reemplazar dos valores de x.

De esta manera, reemplazando los valores $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente:

Sea $x = 0$	Sea $x = 1$
$y = mx + b$	$y = mx + b$
$y = m(0) + b$	$y = m(1) + b$
$y = b$	$y = m + b$

Obteniéndose por ende, los puntos :

$A(0, b)$ y $B(1, m + b)$

Reemplazamos en la ecuación paramétrica:

En el eje x : $x = x_1 + p(x_2 - x_1)$

En el eje y : $y = y_1 + p\ (y_2 - y_1)$

Así resulta entonces :

Sean los puntos $A(0\ ,b)$ y $B(1\ ,\ m + b)$. La ecuación de la recta en forma vectorial es:

Primero: Determinamos el vector origen, mediante la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O};\ \overrightarrow{OA} = (0\vec{i} + b\vec{j}\ ) - (0\vec{i} + 0\vec{j});\ \overrightarrow{OA} = b\vec{j}$$

Segundo: Determinamos el vector dirección mediante te la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A};\ \overrightarrow{AB} = (\vec{i} + m\ \vec{j} + b\vec{j}) - (0\vec{i} + b\vec{j});\ \ \overrightarrow{AB} = (\vec{i} + m\ \vec{j})$$

Tercero: Reemplazamos los elementos en la ecuación vectorial, por lo tanto:

$$(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{OA} + p\ (\overrightarrow{AB})$$
$$(\overrightarrow{OX}) = (b\vec{j}) + p\ (\ \vec{i} + m\vec{j})$$

Ejemplo 13

Expresemos la recta explícita: $y = 5x + 4$ a su forma paramétrica y vectorial.

Paso a la forma paramétrica:

Sea $x = 0$ y $x = 1$, obtendremos los puntos :

Si $x = 0$ entonces se tendrá: $(0, 4)$ donde $x_1 = 0$ y además $y_1 = 4$

Si $x = 1$ entonces se tendrá: $(1, 9)$ de igual manera : $x_2 = 1$ y $y_2 = 9$

Aplicando la expresión paramétrica.

En el eje x : $x = x_1 + p\,(x_2 - x_1) \longrightarrow x = 0 + p(1) \longrightarrow x = p$

En el eje y : $y = y_1 + p\,(y_2 - y_1) \longrightarrow y = 4 + p\,(5) \longrightarrow y = 4 + 5p$

Paso a la forma vectorial:

Consideramos los puntos $A(0, 4)$ y $B(1, 9)$.

Primero: Determinamos el vector origen, mediante la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - 0;\ \overrightarrow{OA} = (0\vec{i} + 4\vec{j}) - (0\vec{i} + 0\vec{j});\ \overrightarrow{OA} = 4\vec{j}$$

Segundo: Determinamos el vector dirección mediante la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A};\ \overrightarrow{AB} = (\vec{i} + 9\vec{j}) - (0\,\vec{i} + 4\vec{j});\ \overrightarrow{AB} = (\vec{i} + 5\,\vec{j})$$

Tercero: Reemplazamos los elementos en la ecuación vectorial, por lo tanto.

$$(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{OA} + p\,(\overrightarrow{AB})$$

$$(\overrightarrow{OX}) = (4\,\vec{j}) + p\,(\vec{i} + 5\,\vec{j})$$

Transformación de la forma paramétrica a la forma explícita

Recordando que la forma explícita, presenta los elementos: pendiente (m) e intersección (b), a continuación se muestra el proceso para obtener las expresiones que nos permitan calcular los elementos de la forma explícita.

Sea una recta en la forma paramétrica: $x = x_1 + ak$ con $y = y_1 + bk$, obtenemos dos puntos cualquiera asignando de manera conveniente los valores de $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$, así.

Sea $k_1 = 0$	Sea $k_2 = 1$
$x_1 = x_1 + ak$ resulta $x = x_1$	$x_2 = x_1 + ak$ resulta $x_2 = x_1 + a$
$y_1 = y_1 + bk$ resulta $y = y_1$	$y_2 = y_1 + bk$ resulta $y_2 = y_1 + b$

Expresión que permita calcular la pendiente (m)

Aplicamos los valores de x_1 , x_2 , y_1 y y_2 en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$; así resultará:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; m = \frac{\cancel{y_1} + b - \cancel{y_1}}{\cancel{x_1} + a - \cancel{x_1}}$$;entonces: $$m = \frac{b}{a}$$

Expresión que permite calcular la intersección con el eje y (b).

De igual manera, reemplazamos los valores de x_1 , x_2 , y_1 y y_2 en la fórmula

$$b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} ; b = \frac{(x_1 + a)(y_1) - (x_1)(y_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{x_1y_1 + a\,y_1 - x_1y_1 + bx_1}{x_1 + a - x_1}$$; entonces: $$b = \frac{ay_1 - bx_1}{a}$$

Una vez que conocemos las expresiones de pendiente (m) e intersección (b), reemplazamos en la ecuación de la recta en forma explícita; así resultará:

$$y = m\,x + b$$

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{ay_1 - bx_1}{a}$$

Ejemplo 14

Expresemos la ecuación en forma paramétrica: $\begin{cases} x = 5 + 4p \\ y = 8 - 3p \end{cases}$ a su forma explícita:

Datos : $x_1 = 5, y_1 = 8, a = 4$ y $b = -3$

Así, reeemplazando en las ecuaciones pendiente (m) e intersección (b), tenemos:

$$m = \frac{b}{a} ; m = -\frac{3}{4}$$

$$b = \frac{ay_1 - bx_1}{a} ; b = \frac{(4 \cdot 8) - (-3 \cdot 5)}{4} ; b = \frac{32 - 15}{4} ; b = \frac{47}{4}$$

así, la expresión de la recta en forma explícita es:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{47}{4}$$

Transformación de la forma vectorial a la forma explícita

Para convertir la expresión de la recta en la forma vectorial a la forma explícita utilizaremos:

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{ay_1 - bx_1}{a}$$

Ejemplo 15

Expresemos la siguiente recta en forma vectorial a su respectiva forma explícita.

Sea la recta $\overrightarrow{OX} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) + p(-2\vec{i} + 5\vec{j})$ determinemos la forma explícita correspondiente:

En la expresión $\overrightarrow{OX} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) + p(-2\vec{i} + 5\vec{j})$

Valores de x_1 y y_1 — Valores de a y b

Así, identificamos los valores : $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, $a = -2$ y $b = 5$; reemplazando en la expresión, tendremos:

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{ay_1 - bx_1}{a}$$ Expresión de conversión

$$y = \frac{5}{-2}x + \frac{(-2)(-4) - (5)(3)}{-2}$$ Reemplazo de valores

$$y = \frac{5}{-2}x + \frac{8 - 15}{-2}$$ Resolución de ( ), producto

Por lo tanto la recta en forma explícita es:

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$ Ley de signos en las fracciones

Actividades

19. Sean las rectas en la forma explícita $y = 4x - 5$, **determina** la expresión vectorial y paramétrica de la recta.

20. Sea la expresión $\overrightarrow{OX} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) + p\,(-2\vec{i} + 5\vec{j})$, **determina** la forma explícita y paramétrica de la recta.

21. Sea la expresión $x = 3p + 2$ y $y = p - 3$, **determina** la forma explícita y paramétrica de la recta.

2.5. Ecuación de una recta paralela a una recta conocida

Dos rectas paralelas tienen la misma dirección, por ende, las pendientes de las mismas son iguales: $m_1 = m_2$

En la forma explícita:

Ejemplo 16

Determinemos la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 3x - 2$ que pase por el punto $(2,3)$

Análisis:

Los datos, según el ejercicio, son: $m = 3$, $b = -2$ y el punto $(2, 3)$, donde $x_1 = 2$ y $y_1 = 3$. Además, al ser rectas paralelas, los valores de las pendientes son iguales. $m_1 = m_2 = 3$.

Solución:

En la expresión: $y - y_1 = m(x - x_1)$, reemplazamos los datos y resolvemos:

$y - 3 = 3(x - 2)$	Reemplazamos
$y - 3 = 3x - 6$	Propiedad distributiva
$y = 3x - 3$	Ecuación en la forma explícita

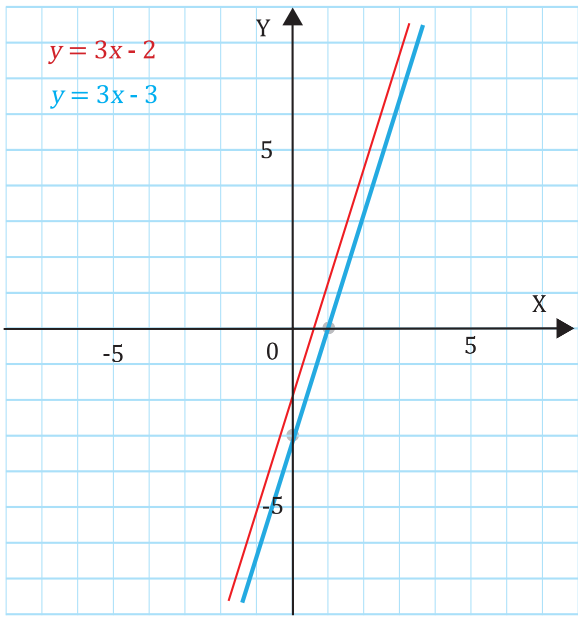


Fig. 15.

Ejemplo 17

Determinemos la ecuación de la recta paralela a $\overrightarrow{OX} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) + p\,(-2\vec{i} + 5\vec{j})$, que pase por el punto $(2\vec{i} + 4\vec{j})$.

Análisis:

Los datos según el ejercicio son: vector de dirección $(-2\,\vec{i} + 5\,\vec{j})$, el cual es el mismo para las dos rectas debido a que son paralelas, vector de origen $(2\vec{i} + 4\vec{j})$ que será el punto por el cual debe pasar la recta paralela.

Solución:

La ecuación de la recta paralela a la recta conocida en la forma vectorial será:

$$\overrightarrow{OX} = (2\vec{i} + 4\vec{j}) + p(-2\vec{i} + 5\vec{j})$$

2.6. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida

Dos rectas perpendiculares forman, en su punto de intersección, un ángulo recto; las pendientes presentan la relación $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Ejemplo 18

Determinemos la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$, que pase por el punto $(1,3)$

Análisis:

Los datos según el ejercicio son: $m_1 = 2$, $b = 1$ y el punto $(1, 3)$, donde $x_1 = 1$ y $y_1 = 3$.

Además, al ser rectas perpendiculares, la pendiente de la segunda recta debe cambiar el signo e invertir los elementos de la pendiente.

Así entonces, si $m_1 = \frac{2}{1}$ entonces $m_2 = -\frac{1}{2}$

Solución:

En la expresión: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, reemplazamos los datos y resolvemos:

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ Reemplazamos

$2y - 6 = -x + 1$ Multiplicamos por 2

$y = \frac{-x + 7}{2}$ Ecuación en la forma explícita

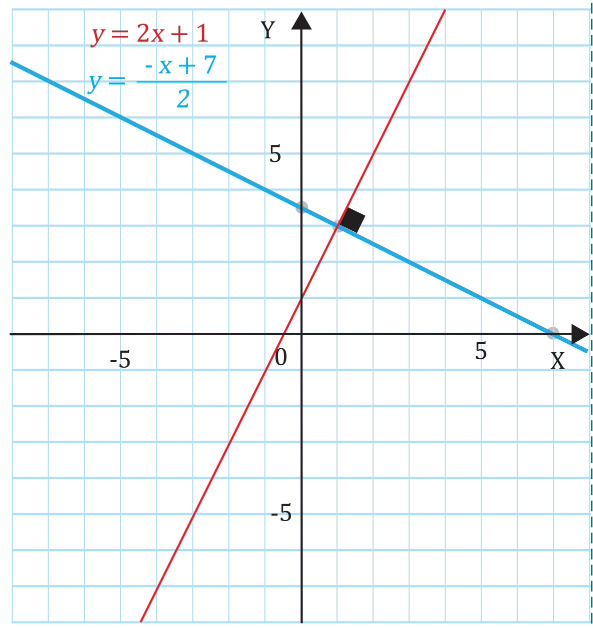


Fig. 16.

Actividades

22. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 5$, que pase por el punto $(1, 2)$ en la forma explícita y vectorial. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

23. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 4x - 2$, que pase por el punto $(2, 3)$ en la forma explícita y vectorial. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

24. **Determina** la ecuación de la recta que pase por el punto $(1,3)$ y que sea perpendicular a la recta $y = -3x - 1$. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

25. **Determina** la ecuación de la recta que pase por el punto $(-2, 0)$ y que sea perpendicular a la recta $y = -5x + 3$. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

2.7. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida con vectores

Cuando se presenta una recta en su forma vectorial, se consideran los aspectos que ilustramos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 19

Determinemos la ecuación de la recta perpendicular a $\overrightarrow{OX} = (\vec{i} - 2\,\vec{j}) + p(-3\vec{i} + 4\vec{j})$, que pase por el punto $(2, 5)$.

Análisis:

Los datos según el ejercicio son: vector de dirección $(-3\,\vec{i} + 4\,\vec{j})$, donde la componente de y $(\vec{j})$ se intercambia con la componente de x $(\vec{i})$ y viceversa para la componente x, con la particularidad de cambiar el signo de la componente. El vector de origen , coincide con el punto de coordenadas rectangulares $(2, 5)$.

Solución:

La ecuación de la recta paralela a la recta conocida en la forma vectorial será:

$$\overrightarrow{OX} = (2\vec{i} + 5\vec{j}) + p(4\vec{i} + 3\vec{j})$$

2.8. Calculo de la distancia entre dos puntos con vectores

Para determinar la distancia entre dos puntos con vectores, calculamos el vector AB, restando las coordenadas de los vectores B y A, mediante la expresión:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = (8\vec{i} + 5\vec{j}) - (\vec{i} + 4\vec{j})$

$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} - \vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{j}$

$\overrightarrow{AB} = 7\vec{i} + \vec{j}$

Luego, calculamos la norma del vector que resulta, aplicando la expresión:

$d\,(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d\,(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(7)^2 + (1)^2}$

$d\,(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ por ende, la distancia es de 7,07 unidades.

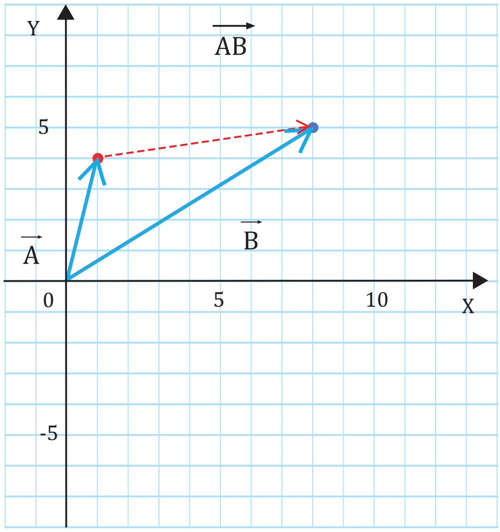


Fig. 17.

Actividades

26. **Calcula** la distancia de los puntos $A = (2, 3, -1)$ y $B = (1, 4, 0)$ a la recta
    $r : (x, y, z) = (1, 3, -2) + k\,(1, 0, 1)$.

27. Sea el triángulo determinado por los puntos $A = (1, 4, -1)$, $B = (0, 0, 1)$ y $C = (1, 3, 1)$. **Halla** la distancia del punto B a la recta determinada por A y C. A continuación, **calcula** el perímetro y el área de este triángulo.

4 Resumen

Producto escalar entre dos vectores.

Es la multipicacion de dos vectores que dan como resultado un número real.

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cos \theta$

Vectores paralelos

Son dos vectores, iguales con una misma línea de acción.

$AxBy = AyBx$

Vectores perpendiculares

Son dos vectores que se cortan formando siempre una ángulo recto (90°)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

Norma de un vector

Es la distancia de un vector desde el punto final al de origen.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ángulo entre dos vectores

Los ángulos de los dos vectores se representa en coordenadas cartecianas y el producto de sus magnitudes.

$$\text{Cos } \theta = \frac{AxBx + AyBy}{A \cdot B}$$

Ecuacion Cartesiana de la recta (explícita). El valor de la pendiente (m) que está dada por la relación $-\frac{A}{B}$ y el valor de la ordenada al origen (b) $-\frac{C}{D}$

Su forma explícita es:

$$y = mx + b$$

Ecuación paramétrica de la recta

En el eje x : $x = x_1 + p\,(x_2 - x_1)$

En el eje y : $y = y_1 + p\,(y_2 - y_1)$

Ecuacion vectorial de la recta. Se compone del vector dirección , la constante p y el vector de dirección.

$$(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{OA} + p\,(\overrightarrow{AB})$$

Problemas resueltos

A

1. **Determina** el producto escalar entre los vectores $\vec{A} = (-5\vec{i} - 3\vec{j})$ y $\vec{B} = (2\vec{i} + 8\vec{j})$.

Solución

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-5\vec{i} \cdot 2\vec{i}) + (-3\vec{j} \cdot 8\vec{j})$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-10) + (-24)$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -34$$

2. **Identifica** si los siguientes vectores son perpendiculares entre sí. **Realiza** un bosquejo referencial del caso.

Solución

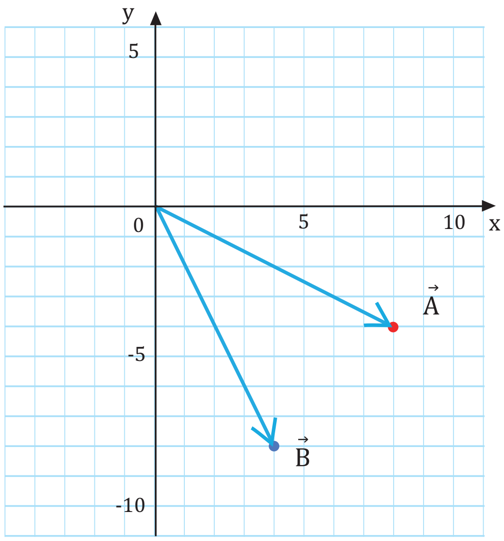


Fig. 18.

$\vec{A} = (8\vec{i} - 4\vec{j})$m y B = $(4\vec{i}; - 8\vec{j})$m
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = (8)(4) + (-4)\ (-8)$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 32 + 32$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 64$

En conclusión, no son vectores perpendiculares.

3. **Identifica** si los siguientes vectores $\vec{A} = (3\vec{i} + 6\vec{j})$ m y $\vec{B} = (4{,}5\vec{i} + 9\vec{j})$ m son paralelos.

Solución

Aplicamos la relación de proporcionalidad
$AxBy = AyBx$
$(3)(9) = (6)(4{,}5)$
$27 = 27$
Resulta una igualdad, por ende, los vectores dados son paralelos.

4. **Determina** la norma en el siguiente vector $\vec{B} = (6\vec{i} - 2\vec{j})$ m.

Solución

$||\vec{B}|| = \sqrt{Bx^2 + By^2}$
$||\vec{B}|| = \sqrt{62 + (-2)^2}$
$||\vec{B}|| = \sqrt{36 + 4}$
$||\vec{B}|| = \sqrt{40}$
$||\vec{B}|| \approx 6{,}32$ m

B

5. **Calcula** el ángulo comprendido entre : $\vec{A} = (-5\vec{i} + 3\vec{j})m$ y $\vec{B} = (-\vec{i} + 4\vec{j})m$.

Solución

Primero: Encontramos el módulo o magnitud de cada vector.

$||\vec{A}|| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$ $\quad ||\vec{B}|| = \sqrt{Bx^2 + By^2}$

$||\vec{A}|| = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2}$ $\quad ||\vec{B}|| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2}$

$||\vec{A}|| = \sqrt{25 + 9}$ $\quad ||\vec{B}|| = \sqrt{1 + 16}$

$||\vec{A}|| = \sqrt{34}$ $\quad ||\vec{B}|| = \sqrt{17}$

$||\vec{A}|| \approx 5{,}84$ $\quad ||\vec{B}|| \approx 4{,}12$

Segundo: Aplicamos la relación correspondiente, con su respectiva gráfica.

$$\text{Cos } \theta = \frac{(Ax \cdot Bx) \cdot (Ay \cdot By)}{||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}||}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{(-5)(-1) + (3)(4)}{(5{,}83)(4{,}12)}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{5 + 12}{24{,}02}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{17}{24{,}02}$$

$\theta = 44{,}95°$

6. **Expresa** la recta explícita: $y = -3x + 1$ en su forma paramétrica y vectorial.

Solución

Paso a la forma paramétrica:
Sea $x = 0$ y $x = 1$, obtendremos los puntos :
Si $x = 0$ entonces tendremos: $(0, 1)$ donde $x_1 = 0$ y ademas $y_1 = 1$
Si $x = 1$ entonces se tendrá: $(1, -2)$ de igual manera: $x_2 = 1$ y $y_2 = -2$
Aplicando la expresión paramétrica.

En el eje x: $x = x_1 + p(x_2 - x_1) \longrightarrow x = 0 + p(1) \longrightarrow x = p$
En el eje y: $y = y_1 + p(y_2 - y_1) \longrightarrow y = 1 + p(-3) \longrightarrow y = 1 - 3p$

Paso a la forma vectorial:
Consideramos los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, -2)$.

Primero: Determinamos el vector origen, mediante la diferencia de coordenadas.

$$\overrightarrow{OA} = A - 0;\ \overrightarrow{OA} = (0\vec{i} + \vec{j}) - (0\vec{i} + 0\vec{j});\ \overrightarrow{OA} = j$$

Segundo: Determinamos el vector dirección mediante la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A};\ \overrightarrow{AB} = (\vec{i} - 2\vec{j}) - (0\vec{i} + \vec{j});\ \overrightarrow{AB} = (i - 3j)$$

Tercero: Reemplazamos los elementos en la ecuación vectorial, por lo tanto:

$$(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{OA} + p\,(\overrightarrow{AB})$$

$$(\overrightarrow{OX}) = (\vec{j}) + p(\vec{i} - 3\vec{j})$$

Ejercicios y problemas

1 Producto escalar

1. Dados los vectores : $\vec{A} = (-8\vec{i} + 12\vec{j})$
$\vec{C} = (4\vec{i} - 3\vec{j})$ y $\vec{B} = (\vec{i} - 2\vec{j})$
Determina.
   a. $\vec{A} \cdot \vec{B}$
   b. $\vec{C} \cdot \vec{B}$
   c. $\vec{A} \cdot \vec{C}$
   d. $\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}$

2. Dados los vectores : $\vec{A} = (-5, 0)$; $\vec{N} = (0, 3)$ y $\vec{M} = (-1, -2)$
Determina.
   a. $\vec{A} \cdot \vec{N}$
   b. $\vec{A} \cdot \vec{M}$
   c. $\vec{M} \cdot \vec{N}$
   d. $\vec{A} \cdot \vec{M} \cdot \vec{N}$
   e. $\vec{A} \cdot \vec{A}$
   f. $\vec{M} \cdot \vec{N} \cdot \vec{N}$

3. ¿Cómo verifico si dos vectores son perpendiculares?

4. ¿Cómo verifico si dos vectores son paralelos?

5. ¿Cuál de los siguientes vectores es perpendicular a $\vec{C} = (-2\vec{i}\ ,4\vec{j})$
   a. $\vec{E} = (-10\vec{i}, 5\vec{j})$
   b. $\vec{F} = (-5\vec{i}, 10\vec{j})$
   c. $\vec{G} = (5\vec{i}, -10\vec{j})$
   d. $\vec{P} = (10\vec{i}, 5\vec{j})$

6. ¿Cuál de los siguientes vectores es perpendicular a $\vec{C} = (5\vec{i}, -3\vec{j})$
   a. $\vec{E} = (6\vec{i}\ ,10\vec{j})$
   b. $\vec{F} = (10\vec{i}, 6\vec{j})$
   c. $\vec{G} = (6\vec{i}, -10\vec{j})$
   d. $\vec{P} = (-6\vec{i}, 10\vec{j})$

7. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\vec{M} = (5\vec{i}, -3\vec{j})$?
   a. $\vec{A} = (2\vec{i}\ ,3\vec{j})$
   b. $\vec{N} = (10\vec{i}, 6\vec{j})$
   c. $\vec{M} = (10\vec{i},\ -6\vec{j})$
   d. $\vec{B} = (-6\vec{i}, 10\vec{j})$

8. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\vec{P} = (\vec{i}, -\vec{j})$?
   a. $\vec{A} = (-5\vec{i}, 5\vec{j})$
   b. $\vec{N} = (\vec{i}, \vec{j})$
   c. $\vec{M} = (5\vec{i},\ -5\vec{j})$
   d. $\vec{B} = (-\vec{i}, 2\vec{j})$

9. Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura, **calcula** gráficamente.
   a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
   b. $-2\vec{w}$
   c. $\vec{u} + 2\vec{v}$
   d. $2\vec{u} - \vec{v}$

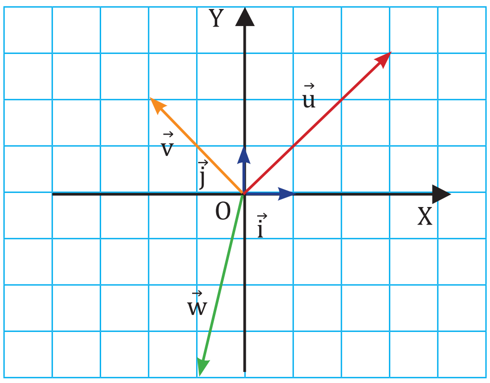


Fig. 19.

10. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (-2, 2)$, referidos a una base ortonormal, **calcula**:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$
   b. $-2\vec{u} \cdot \vec{v}$
   c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$

11. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (2, 2)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, **calcula** $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + 4\vec{w})$.

12. Averigua si los puntos A, B y C estan alineados en cada uno de los siguientes casos:

a. $A = (0, 3), B = (1, 1)$ y $C = (1, 5)$

b. $A = (-1, 3), B = (4, 0)$ y $C = (2, 6)$

2 Norma de un vector

13. Dados los vectores : $\vec{A} = (-1, 0)$ $\vec{N} = (0, -1)$ y $\vec{M} = (-7, -2)$. **Determina** la magnitud de:

a. $\vec{A}$

b. $\vec{M}$

c. $\vec{N}$

d. $\vec{M} + A$

e. $\vec{M} + N$

3 Distancia entre dos puntos

14. Dados los vectores : $\vec{A} = (-10, 5)$ $\vec{N} = (2, -2)$ y $\vec{M} = (0, -2)$. **Determina** la distancia entre:

a. $\vec{A}$ y $\vec{N}$

b. $\vec{M}$ y $\vec{N}$

c. $\vec{A}$ y $\vec{M}$

d. $\vec{M} + \vec{A}$

e. $\vec{M} + \vec{M}$

f. El resultado obtenido en los literales c y d es igual?¿Por qué?

g. ¿Por qué se obtiene el resultado del literal e?

4 Ángulo entre dos vectores

15. Dados los vectores : $\vec{Z} = (20m, 50^{o})$ $\vec{X} = (8i, -2j)$ y $\vec{Y} = (i, -5j)$. **Determina**.

a. La norma de $\vec{Z}$

b. La norma de $\vec{X}$

c. $\vec{X} \cdot \vec{Z}$

d. El ángulo entre los vectores $\vec{X}$ y $\vec{Z}$

e. La norma de $\vec{Y}$

f. $\vec{X} \cdot \vec{Y}$

g. El ángulo entre los vectores $\vec{X}$ y $\vec{Y}$

16. En la siguiente figura, **determina**.

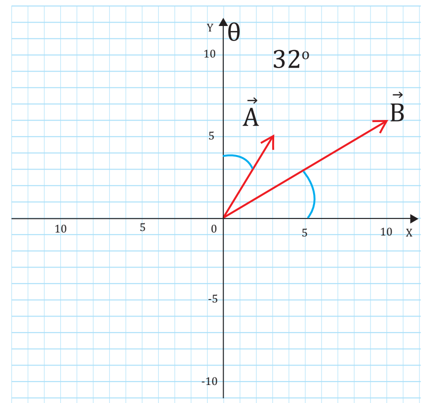


Fig. 20.

a. El ángulo entre A y B

b. El valor de θ.

17. **Calcula** el ángulo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si se conoce que:

a. $\vec{a}\,(4, 5)$; $\vec{b}\left(\frac{16}{5}, 6\right)$

b. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ y

$A\,(4, 6)$, $B\left(-2, \frac{26}{5}\right)$, $C\left(9, \frac{103}{10}\right)$, $D\left(-\sqrt{3}, 5\right)$

c. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

d. $\vec{a} = (-1, 0)$; $\vec{b} = \vec{i}$

18. Las componentes de u, v y w en una cierta base son $u = (-1, 2)$, $v = (2, 3)$ y $w = (1, 0)$. Expresa cada uno de estos vectores como combinación lineal de los otros dos.

19. **Escribe** en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.

20. **Escribe** en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $B = (2, -1)$ y que tiene como vector director $\vec{u} = (3, 5)$

5 Ecuación explícita de la recta

21. **Encuentra** la ecuación explícita de la recta $5x + y - 7 = 0$.

22. **Encuentra** la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $(7; -2)$ y $(12; 3)$.

23. **Encuentra** la pendiente y la ordenada al origen de la recta $y = \frac{3x + 7}{2}$

24. **Encuentra** la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x - 5y = 0$

6 Ecuación vectorial de la recta

25. **Encuentra** la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-3; 5)$ y es parte del vector $v = (-2; -7)$.

26. La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-2; 9)$ es $(x, y) = (-2; 9) + k(-6; 7)$. ¿Cuál es el valor del vector director?

27. **Encuentra** la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P = (-8; -5)$ y $Q = (-2; 9)$.

7 Ecuación paramétrica de la recta

28. **Encuentra** la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punta $B = (5; 6)$ y tiene un vector director de $(-9; -2)$

29. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $P\ (5; 8)$ es $x = 5 + 3p$ e $y = 8 - p$. ¿Cuál es el valor del vector director?

30. Dada la ecuación que se expresa mediante : $x = p + 8$; $y = 2p - 11$, donde p es un número real, **determina.**

a. Los puntos determinados por : ....$-3,-2,-1,0,1, 2$ y 3.

b. La relación algebraica entre x e y.

c. La gráfica de la función.

8 Formas de expresión de la recta

31. **Representa** la recta $5x + 3y = 0$; en forma explícita, paramétrica y vectorial.

32. **Encuentra** las ecuaciones explícita, general paramétrica de la siguiente recta

$(x, y) = (3; -2) + p(2; 5)$.

33. **Escribe** en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.

34. **Escribe** en todas las posibles la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, -3)$ y $B = (2, 0)$

35. **Escribe** la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P y tiene como vector director $\vec{a}$.

a. $P(4, 5)$, $\vec{a}\ (-4, 6)$

b. $P\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$; $\vec{a}\ (5, 3)$

36. **Escribe** la ecuación paramétrica de la recta que contiene a los puntos:

a. $A(0, 0)$, $B(-3, -6)$

b. $G\left(-\sqrt{3}, 5\right)$, $H\left(-\sqrt{3}, 2\right)$

9 Conversion explícita – paramétrica

37. Expresa $y = 2x - 4$ en su forma paramétrica.

38. Sean los puntos $(4, 3)$ y $(2, 2)$. **Determina** la forma paramétrica de la recta descrita.

39. Una recta se describe mediante los elementos $m = 3$ y $b = -2$. **Determina** la forma paramétrica de la misma.

40. Sea la gráfica, además de los puntos $(0,-2)$ y $(0.4, 0)$. **Halla** la forma paramétrica de la recta descrita.

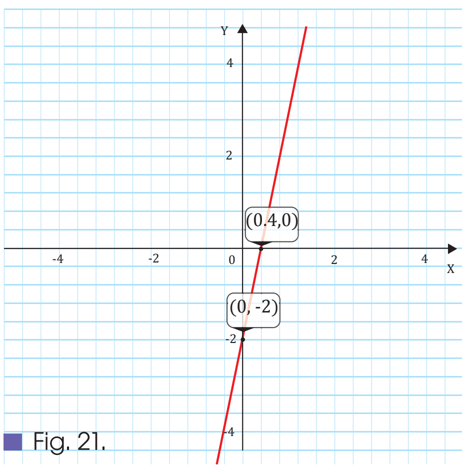


Fig. 21.

10 Conversion paramétrica explícita

41. Sea la ecuación $\begin{cases} x = 4 + 3p \\ y = 1 - p \end{cases}$.

Determina.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

42. Sea la ecuación $\begin{cases} x = 3p \\ y = 5 + 2p \end{cases}$.

Determina.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

11 Conversion vectorial – explícita

43. Sea la recta $\overrightarrow{OX} = (5i - 2j) + p(i + 4j)$, **determina** la forma explícita.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

12 Recta paralela a una recta dada.

44. Determina la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 5x + 4$, que pase por el punto $(2, 3)$.

45. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -x + 4$, que pase por el punto $(-1, 0)$.

46. Dado el triángulo de vértices los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 5)$ y $C = (-1, -2)$, calcula la ecuación de:

a. La recta que pasa por A y es paralela al lado BC.

b. La mediana que parte de B.

c. La altura que parte de C.

Para finalizar

1. Sean los vectores $\vec{A}\,(5\,,8)$ y $\vec{B}\,(3\,,2)$. Al realizar el producto punto, resulta.

   a. 46 c. 13

   b. 31 d. 18

2. La magnitud del vector $\vec{M} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ es:

   a. $\sqrt{39}$ c. 3

   b. $\sqrt{-39}$ d. $\sqrt{89}$

3. El producto escalar entre dos vectores. Perpendiculares es:

   a. 0 c. 1

   b. 90 d. -1

4. El vector perpendicular a $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ es:

   a. $-7\vec{i} + 3\vec{j}$ c. $-9\vec{i} + 12\vec{j}$

   b. $12\vec{i} + 9\vec{j}$ d. $3\vec{i} + 4\vec{j}$

5. Sean los vectores $\vec{A} = (3\,,-4\,)$ y $\vec{B} = (-2\,,3\,)$

   El módulo de los vectores respectivamente es:

   a. $14,\ \sqrt{12}$ c. $5,\ \sqrt{-13}$

   b. $12,\ \sqrt{15}$ d. $\sqrt{5}\,,\ 13$

6. Sean los vectores $\vec{A} = (-5i\,,- j)$ y $\vec{B} = (-2i\,,3j)$

   El producto punto entre A y B es:

   a. 7 c. 9

   b. 12 d. -12

7. El ángulo formado por los vectores del ejercicio anterior es:

   a. $12{,}68^{o}$ c. $67{,}59^{o}$

   b. $0{,}38^{o}$ d. $22{,}41^{o}$

8. Responde verdadero (V) o falso (F).

   a. El producto $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$.

   b. Para verificar que dos vectores son paralelos utilizamos la ecuación: $AxBy = AyBx$.

   c. El producto escalar entre dos vectores que son perpendiculares es igual a uno.

   d. Los vectores que son iguales forman 180°.

   e. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual al producto de sus módulos.

   f. El producto escalar es conmutativo.

   g. El producto $\vec{i}\cdot\vec{i} = 0$.

9. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 3$, que pase por el punto $(2, 3)$.

10. **Halla** la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = -5x + 1$, que pase por el punto $(-1, -2)$.

11. Considerando la siguiente gráfica, **determina** la ecuación de la recta paralela a la recta L, que pase por el punto $(0\,,4)$; y además, la ecuación de la recta perpendicular a la recta L, que pase por $(0\,,1)$.

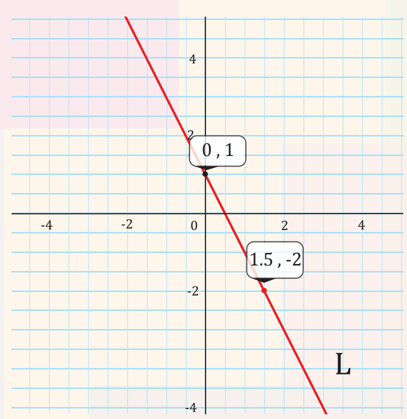


Fig. 22.

Para finalizar

12 La intersección de la recta explícita $-2x + y - 7 = 0$ es :

a. -2 c. 2

b. 7 d. -7

13 **Encuentra** la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos: $(7; -5)$ y $(-2; 3)$.

a. $3x - 2y = 12$ c. $7x + 2y = 11$

b. $y = 2x - 3$ d. $8x + 9y = 11$

14 La pendiente y la ordenada al origen de $3x + 4y = -7$ es:

a. $-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}$ c. $-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}$

b. $-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}$ d. $\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}$

15 Considerando los vectores: $\vec{M} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ y $\vec{N} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.

- **Determina** si son paralelos o perpendiculares.

16 Sean los vectores: $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + \vec{j}$. **Determina** la magnitud de los vectores y la distancia que hay entre ellos.

17 Dada la ecuación paramétrica: $x = 3 + 7p$ y $y = -4 + p$, **determina** la relación algebraica entre x y y.

18 Una partícula se desplaza desde el punto $(3 , 5)$ hasta $(12 , 25)$. **Determina** la distancia recorrida.

19 Sea la ecuación $\begin{cases} x = -p + 6 \\ y = 5 + 2p \end{cases}$

Determina.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

20 Sea la recta $\overrightarrow{OX} = (7\vec{i} - \vec{j}) + p(3\vec{i} + 4\vec{j})$. **Determina.**

a. El vector de origen

b. El vector de dirección

c. Los valores de x_1, y_1 ,a y b.

d. El valor de la pendiente

e. El valor de la intersección

f. La ecuación explícita

21 Sean los puntos $(5, -3)$ y $(0, 2)$. **Determina** la forma paramétrica de la recta descrita.

22 **Convierte** la expresión explícita $y = -9x + 2$ a la forma paramétrica

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SENTIDO CRÍTICO

Einstein y la teoría de la relatividad

«Los problemas de espacio y tiempo se piensan durante la infancia; yo lo hice cuando ya había crecido»

Esta frase pertenece al científico alemán Albert Einstein (1879-1955), quien, entre 1905 y 1915, publicó sus teorías de la relatividad sobre la localización de los sucesos físicos. En estos escritos, habló por primera vez del tiempo como una cuarta dimensión indispensable para ubicar un objeto en el espacio en un momento determinado.

Extraído 5 de abril del 2016
desde la página web: http://goo.gl/cXvC9H

SOCIEDAD

El cuaternión

El origen de la palabra *vector* se atribuye al matemático italiano **Giusto Bellavitis** (1803-1880). No obstante, dicho concepto tuvo un precursor, el *cuaternio* o *cuaternión,* impulsado por el matemático irlandés **William R. Hamilton** (1805-1865), quien en 1843 representó los números complejos con cuatro dimensiones. De esta cantidad deriva dicho nombre.



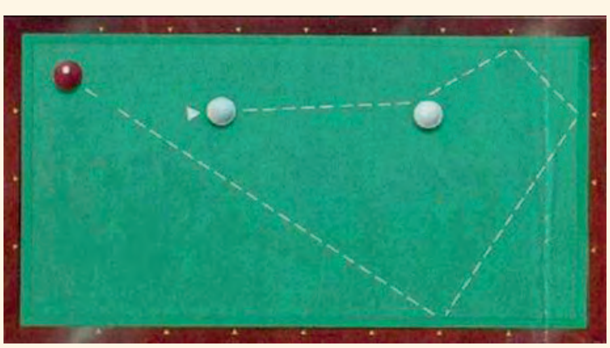
https://goo.gl/gdlQHg

- Placa conmemorativa en el puente de Brougham (Dublín, Irlanda donde Hamilton ideó los cuaterniones mientras paseaba.

SOCIEDAD

El billar y los vectores

En el choque de dos bolas de billar intervienen, en su desplazamiento, vectores.
En el siguiente enlace podrás acceder a actividades interactivas relacionadas con los vectores y el billar:
http://links.edebe.com/mwx



http://goo.gl/vEqrRO

NOTICIAS

Los vectores y la animación audiovisual

Una de las aplicaciones de los vectores es la creación de animaciones de gráficos vectoriales. A partir de programas informáticos, el usuario crea y edita imágenes con el ordenador.

El enlace http://links.edebe.com/i3sz9c te facilitará información sobre los gráficos vectoriales y el tipo de imágenes que produce. ¿Que diferencia existe respecto a las imágenes creadas a partir de mapas de bits?

SI YO FUERA....

Piloto de aviación

aplicaría vectores debido a que durante mi formación utilizaría la triangulación de tres vectores: velocidad con respecto a tierra, velocidad con respecto al viento y velocidad conjunta de los motores, en la cual relacionaría distancias y ángulos para determinar cada uno de ellos.



http://goo.gl/HMgohZ

5 Cónicas



CONTENIDOS:



http://goo.gl/89oXPs

Películas

En el siguiente enlace puedes ver un fragmento de la película Ágora en la que Hipatia teoriza sobre la posibilidad de que la Tierra describa una órbita elíptica alrededor del Sol:

Web

En este vídeo puedes observar un fenómeno que se denomina descenso de la serpiente:

http://links.edebe.com/k6gc

Este fenómeno se produce cada año con la llegada del equinoccio de primavera en la *Pirámide de Kukulkán* (525 d. C.), en la antigua ciudad maya de Chichén Itzá. Consiste en un juego de luces que representa el cuerpo de una serpiente que se desplaza desde la cima de la pirámide hasta la base.

La *Pirámide de Kukulkán* es, en realidad, un calendario gigante con el que los mayas podían, por ejemplo, predecir los cambios de estación. También demuestra los profundos conocimientos de matemáticas, geometría y astronomía que esta cultura poseía.

EN CONTEXTO

a. Visualiza el fragmento de la película **Ágora:**

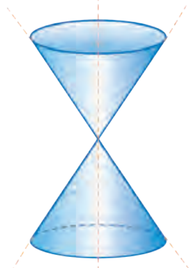
- En la época de Hipatia, ¿cómo se pensaba que eran los movimientos de los cuerpos celestes?
- ¿Conoces algún otro personaje que en su día se cuestionara la creencia de que la Tierra orbita de manera circular alrededor del Sol?
- ¿Quién fue el primer personaje en demostrar que las órbitas de los planetas eran elípticas? ¿Cómo llegó a esta conclusión?

b. Durante muchos siglos, los fenómenos celestes fueron objeto de estudio y estuvieron sujetos a supersticiones, creencias, etc. **Busca** información sobre la cultura maya y su amplio conocimiento de la astronomía.

CÓNICAS

Y TAMBIÉN: ¿?

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición geométrica.



Circunferencia de centro C y radio r.

Fig. 1.

Si giramos una recta alrededor de un eje con el que tiene un punto en común, obtenemos una **superficie cónica de revolución.**

La intersección de una superficie cónica de revolución con un plano determina una familia de curvas que tienen una gran importancia en campos como la arquitectura o la ingeniería: las **cónicas**.

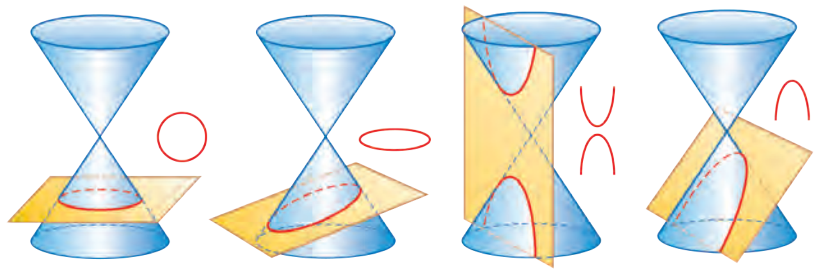


Fig. 2.

Observamos en la imagen que las cónicas varían en función de la inclinación del plano.

Una cónica es la curva que se obtiene como intersección de una superficie cónica de revolución y un plano.

Veamos a continuación cómo definir las cónicas como lugares geométricos del plano.

1. LA CIRCUNFERENCIA

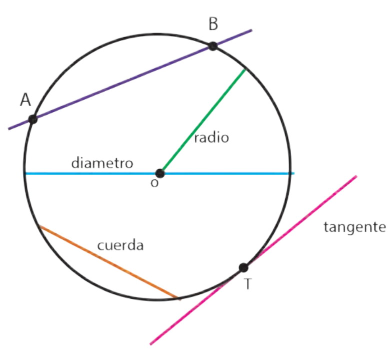


Fig. 3.

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal forma que la distancia a un punto fijo permanece constante. El punto fijo se denomina centro de la circunferencia y la distancia fija, radio de la circunferencia (r).

La circunferencia es el perímetro del círculo, que posee los siguientes component es:

Centro: El punto interior equidistante a todos los puntos de la circunferencia.

Radio: Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella. El radio se denota con la letra «r» o bien con sus puntos extremos, su medida es constante.

Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia de manera interna.

Diámetro: Es la cuerda de mayor medida que pasa por el centro de la circunferencia. Lo denotamos mediante «d» y es el doble del radio $(2r)$.

Tangente: Es la recta que intersecta a solo un punto de la circunferencia.

Secante: Es la recta que corta a la circunferencia, intersecando dos puntos de ella.

1.1 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen

Según la definición, se tiene que cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la circunferencia se encuentra a una distancia CP desde el centro, y a este segmento se le conoce como radio.

Aplicando la fórmula de distancia entre los puntos de un punto $P(x, y)$ al centro $C(h, k)$:

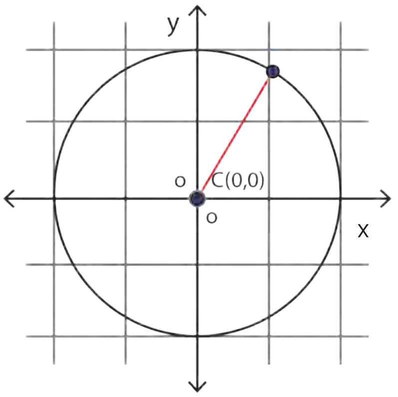


Fig. 4.

$$d = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Se elimina la raíz: $d^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Se sustituye d (distancia) por r (radio), porque $d = r$

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Reemplazamos en la fórmula las coordenadas $C\ (0,0)$ $r^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$

Ecuación canónica de la circunferencia $C(0,0)$: $r^2 = x^2 + y^2$

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio = 4

$x^2 + y^2 = r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia

$x^2 + y^2 = (4)^2$ Reemplazo de datos.

$x^2 + y^2 = 16$

Ejemplo 2

Determinemos la ecuación de la circunferencia a partir de la siguiente gráfica.

Ecuación canónica de la circunferencia

Datos: La gráfica Ecuación = ?

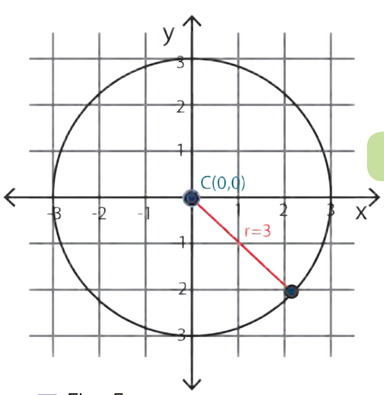


Fig. 5.

$x^2 + y^2 = r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia

$x^2 + y^2 = (3)^2$ Reemplazo de datos.

$x^2 + y^2 = 9$

Ejemplo 3

Considerando la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ determinemos la gráfica de la circunferencia correspondiente.

Datos: $x^2 + y^2 = 4$ Gráfica = ?

Al comparar la ecuación dada en los datos con la ecuación general, es posible establecer la igualdad: $r^2 = 4$; entonces $r = 2$.

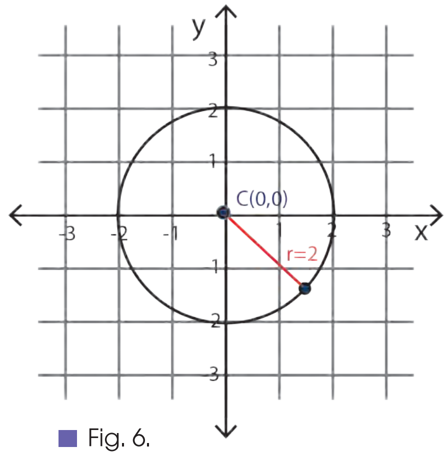


Fig. 6.

Actividades

1. **Representa** gráficamente las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + y^2 = 6$

b. $x^2 + y^2 = 2$

c. $x^2 + y^2 = \frac{12}{25}$

d. $x^2 + y^2 = (5)^2$

e. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

2. **Relaciona** las ecuaciones con su respectiva gráfica

1.

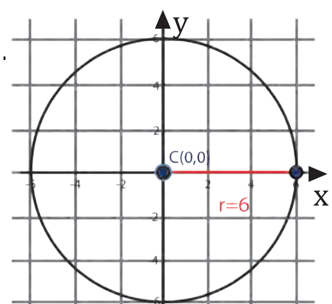


Fig. 7.

3.

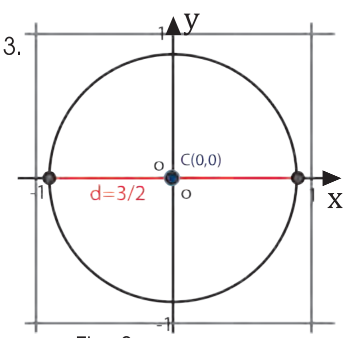


Fig. 8.

2.

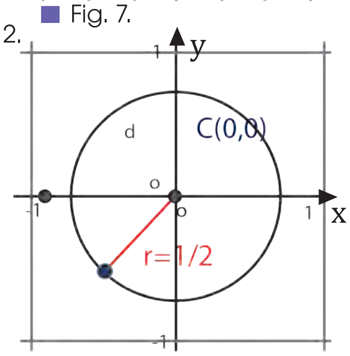


Fig. 9.

4.

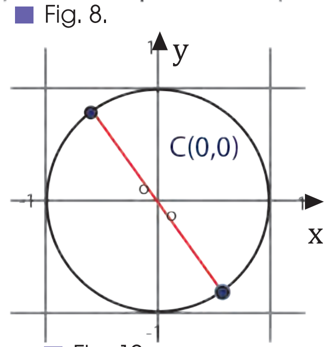


Fig. 10.

a. $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

b. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

c. $x^2 + y^2 = 4$

d. $x^2 + y^2 = 36$

3. **Determina** las ecuaciones que cumplan con las condiciones dadas.

a. $C\,(0, 0);\ d = \frac{2}{3}$

b. $C\,(0, 0);\ r = 3$

c. $C\,(0, 0);\ r = \sqrt{6}$

d. $C\,(0, 0);\ r = 1\ \frac{2}{3}$

1.2. Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)

Iniciamos con el mismo procedimiento ejecutado anteriormente para obtener la ecuación canónica con C (0, 0), pero en este caso, vamos a sustituir por el centro de coordenadas C (h, k) **pues este se encuentra fuera del origen**.

Empleamos la fórmula de distancia desde un punto P (x, y) al centro C (h, k)

$$d= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Se elimina la raíz: $d^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Como la distancia es igual al radio, tenemos que:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ Ecuación canónica con C(h, k)

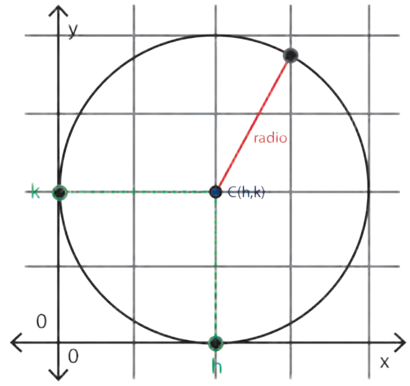


Fig. 11

Ejemplo 4

Determinemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro (-2, -3) y radio 5.

Datos: Centro (-2, -3) y radio 5.

Solución:

Reemplazamos en la ecuación canónica $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Resolvemos la potencia y los signos $(x - (-2)^2 + (y - (-3))^2 =(5)^2$

Ecuación canónica con centro (-2,-3) y radio 5. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Ejemplo 5

Determinemos la ecuación de la circunferencia si los extremos del diámetro son los puntos M (2, 3) y N (-3, -1).

Datos: Puntos M (2, 3) y N (-3,-1).

Solución:

Primero: Calculamos el punto medio entre los puntos M y N.

$$P_{MN}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \frac{y_2+y_1}{2}\right)\ ;\ P_{MN}=\left(\frac{2-3}{2}\ ;\ \frac{3-1}{2}\right)\ ;\ P_{MN}=\left(\frac{-1}{2}\ ;\ 1\right)$$

El punto medio del diámetro coincide con las coordenadas del centro, C $\left(\frac{-1}{2}\ ;\ 1\right)$

Segundo: Calculamos las distancia entre el centro y uno de los puntos, para determinar la longitud del radio.

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2);}\quad r = \sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 + (3-1)^2}\ ;\ r = \sqrt{\left(\frac{25}{4}+4\right)};\quad r = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

Reemplazamos las coordenadas del centro y el valor del radio en la ecuación canónica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2;\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2\ ;\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{41}{4}$$

Ecuación general de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación canónica de la circunferencia, resolviendo el producto notable binomio al cuadrado (en los dos paréntesis), tenemos:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Ecuación canónica con centro $C(h,k)$
$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + y^2 = r^2$	Resolviendo el binomio al cuadrado
$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + y^2 - r^2 = 0$	Ordenando los términos convenientemente
$A = -2h$, $B = -2k$ y $C = h^2 + y^2 - r^2$	Reemplazando las constantes A, B y C
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	Ecuación general de la circunferencia

Ejemplo 6

Determinemos las ecuaciones canónica y general de la circunferencia de radio 6, cuyas coordenadas del centro son (-3 ,2).

Datos: $r = 6$, $C = (-3, 2)$. a. Ecuación canónica = ? ; b. Ecuación general = ?

Según los datos, conocemos las coordenadas del centro y el valor del radio, así tenemos en la ecuación canónica.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Ecuación canónica con centro $C(h, k)$
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$	Al reemplazar los valores de h y k cambian los signos.

Al desarrollar la ecuación canónica con centro h, k, resolvemos los productos notables, y las constantes. Al igualar a cero resulta:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 36$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 + 4 = 36$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 - 36 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$ Ecuación General de la circunferencia

Actividades

4. **Determina** las ecuaciones canónica y general para las circunferencias descritas:
   a. Radio 8, centro (-2, 3).
   b. Radio 2, centro (5, 2).
   c. Radio 4, centro (-2, -1).
   d. Radio 7, centro (-5, 8).
   e. Radio 12, centro (-1, 0).
5. **Halla** la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halla sobre el eje de abscisas y es tangente a la recta r: $y = -x + 3$ en el punto $P = (-1, 4)$.
6. **Halla** la ecuación general de una circunferencia de radio 2 que es concéntrica con la que tiene como extremos de un diámetro los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (8, 3)$
7. Considerando las siguientes ecuaciones de hipérbolas , determine las coordenadas del centro, vértices y focos así como la representación gráfica.
   a. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{49} = 1$
   b. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$
   c. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Obtención del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia

A partir de la fórmula general, obtendremos la ecuación canónica de la circunferencia utilizando el método de completación para trinomios cuadrados perfectos.

$x^2 + y^2 + Ax + By + C= 0$ Ecuación general de la circunferencia

$(x^2 + Ax) + (y^2 + By)= - C$ Agrupando los términos según x e y.

$$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \ y^2 + By + \frac{B^2}{4} = - C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

Aumentamos el término ideal para completar el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo para dos y elevando al cuadrado el segundo término.

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

Factorando los trinomios y resolviendo las fracciones.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ Comparamos con la ecuación canónica.

Por lo cual, se concluye que el radio es $r = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Ejemplo 7

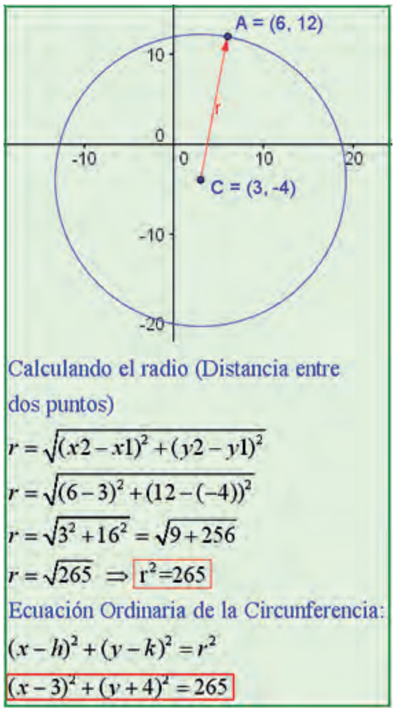
Determinar el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia descrita por: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$	Dato
$(x^2 + 4x) + (y^2 + 2y) = 31$	Agrupando los términos según x e y.
$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 31 + 4 + 1$	Completando el trinomio.
$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 36$	Factorando los trinomios
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Comparamos con la ecuación canónica

Actividades

8. **Determina** el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de las ecuaciones:
   a. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$
   b. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$
   c. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y = 8$
   d. $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$

https://goo.gl/h0lH6c



- Ecuaciones de una circunferencia

Verificación de la ecuación general de la circunferencia

Ahora analizaremos la ecuación general, para verificar si representa o no una circunferencia, estudiando las características del radio; según la expresión obtenida en apartados anteriores: $r = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Consideramos los casos:

Cuando $A^2 + B^2 - 4C > 0$, la ecuación general representa una circunferencia de radio igual a $r = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$ y centro en el punto $\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$.

Cuando $A^2 + B^2 - 4C = 0$, la ecuación general representa un punto de coordenadas $\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$.

Cuando $A^2 + B^2 - 4C < 0$, la ecuación general representa una circunferencia imaginaria.

Por lo que podemos concluir que la ecuación general solo representa una circunferencia cuando

$$A^2 + B^2 - 4C > 0.$$

Ejemplo 8

Sean las ecuaciones generales, determinemos si representa o no una circunferencia. En caso afirmativo, hallemos el centro y el radio respectivo.

Solución:

$2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$	Dato
$2(x^2 - 3x) + 2(y^2 + 5y) = -7$	Factor común y agrupación
$2\left(x^2 - 3x + \dfrac{9}{4}\right) + 2\left(y^2 + 5y + \dfrac{25}{4}\right) = -7 + \dfrac{18}{4} + \dfrac{50}{4}$	Suma de $\dfrac{9}{4}$ y $\dfrac{25}{4}$
$2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{-28 + 18 + 50}{4}$	Resolviendo los trinomios
$2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = 10$	Resolviendo las operaciones con fracciones.
$\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = 5$	Dividiendo para 2.
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Ecuación canónica de la circunferencia

Al comparar la ecuación obtenida y la canónica, es posible concluir:

El radio es igual a $\sqrt{5} \approx 2,24$ y las coordenadas del centro son $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

2. LA ELIPSE

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a los puntos fijos denominados focos (F_1 y F_2) no cambia. Así, tenemos que un punto $P(x, y)$ pertenece a la elipse si y tan solo si $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$, en donde a corresponde a un número real positivo.

Los elementos que corresponde a la elipse son:

- **Centro**: Es el punto de intersección de los ejes que unen los focos.
- **Vértices**: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes; entonces se considera (V_1 y V_2) a los puntos que cortan al eje focal y (B_1 y B_2) a aquellos que intersecan al eje normal.
- **Focos**: Son los puntos fijos (F_1 y F_2) que generalmente se encuentran sobre el eje mayor.
- **Eje focal**: También nombrado eje de simetría o principal, es la recta que pasa por los focos.
- **Eje normal o secundario**: Recta perpendicular al eje de simetría.
- **Eje mayor**: Es el segmento más largo de la elipse que une los puntos (V_1 y V_2), denominado como $2a$.
- **Eje menor**: Es el segmento más pequeño de la elipse que une lo puntos (B_1 y B_2) denominado como $2b$.
- **Lado recto**: Es el segmento de recta paralela al eje menor que pasa por uno de los focos y une dos puntos cualesquiera de la elipse.

2.1. Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal x

En las elipses con centro en el origen y eje de simetría x se cumple que:

- Centro $(0,0)$
- $V_1(-a, 0)$; $V_2(a, 0)$
- Cortes con los ejes $B_1\,(0, b)$; $B_2\,(0, -b)$
- Focos $F_1\,(-c, 0)$; $F_2\,(c,0)$
- Eje focal x
- Eje normal y
- Longitud eje mayor $2a$
- Longitud eje menor $2b$
- Lado recto $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

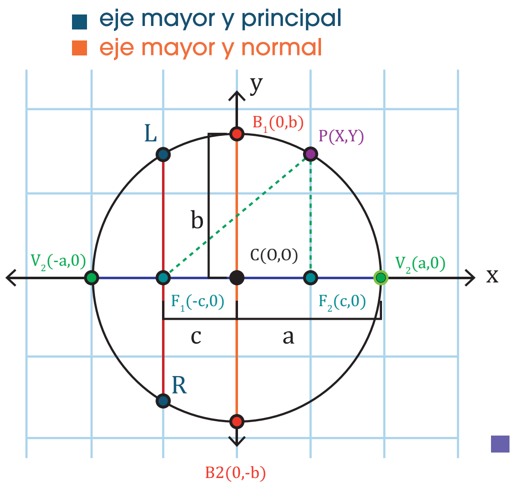


Fig. 12.

La excentricidad debe ser siempre menor que uno y mayor que 0, además que c debe ser menor que a. La ecuación que la representa es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.Si c es igual a 0, los focos coincidirán con el centro y representará una circunferencia.

Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$; de ella, podrás despejar la variable que necesites para encontrar su valor, siempre y cuando tengas tan solo una incógnita desconocida.

Para obtener la ecuación de la elipse partimos desde su definición: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, para ello, determinamos la distancia de un punto cualquiera $P(x, y)$ a los focos $F_1\,(-c, 0)$ y $F_2\,(c, 0)$.

$$d(P,F_1)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad d(P,F_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d(P,F_1)=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} \qquad d(P,F_2)=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

Sumamos las distancias e igualamos a 2a.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Resolvemos las raíces

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Desarrollamos el binomio que se presentan en ambos lados de la ecuación y eliminamos términos semejantes.

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Extraemos factor común y simplificamos

$$-4(xc-a^2)=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,; \quad (a^2-xc)=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,;$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(a^2-xc)^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2)^2}\ ;\ a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

Reducimos términos semejantes, agrupamos los términos por variables que tengan x e y a un solo lado de la ecuación, luego factorizamos.

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2; \qquad a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$$

Tenemos que la distancia del punto B_1 $(0,b)$ a cada foco es a. Por lo tanto, aplicamos teorema de Pitágoras y despejamos b^2.

$$a^2=b^2+c^2\ ;\ b^2=a^2-c^2$$

Sustituimos todos los (a^2-c^2) que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$$a^2b^2=x^2b^2+a^2y^2; \qquad x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos.

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}\ ;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ ecuación de la elipse con eje focal x

Recuerda que a siempre será el mayor valor en la ecuación de una elipse.

Ejemplo 9

Dada la ecuación de una elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, determinemos las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y realicemos la representación gráfica.

$4x^2 + 9y^2 = 36$ Dividimos para 36 $\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Al comparar la expresión obtenida con $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tenemos: $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo tanto $a = 3$ y $b = 2$.

Ahora, según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de c, $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, $c = \sqrt{(3^2 - 2^2)}$ entonces $c = \sqrt{5}$.

Vertices: $V_1(-a, 0); V_2(a, 0) \longrightarrow V_1(-3, 0); V_2 (3, 0)$

Focos $F_1 (-c, 0); F_2 (c, 0) \longrightarrow F_1 (-\sqrt{5}, 0); F_2 (\sqrt{5}, 0)$

$B_1 (0, 2); B_2 (0, -2)$

Longitud eje mayor $2a = 6$

Longitud eje menor $2b = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{3}$; $LR = \frac{2(2)^2}{3}$; $LR = \frac{8}{3}$; $LR \approx 2{,}67$

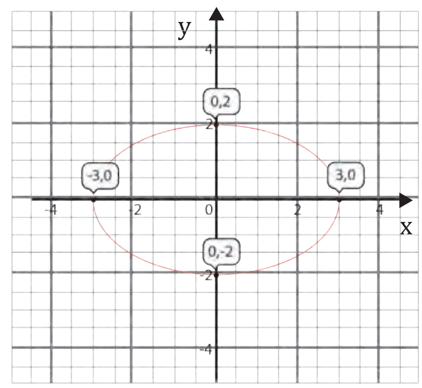


Fig. 13

Ejemplo 10

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ y sus focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

Solución

Según los vértices $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ entonces $a = 7$ y los focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$, $c = 5$.

Ahora según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de b:

$b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$, $b = \sqrt{(7^2 - 5^2)}$ entonces $b = \sqrt{24}$.

Ahora, reemplazamos en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Resulta: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

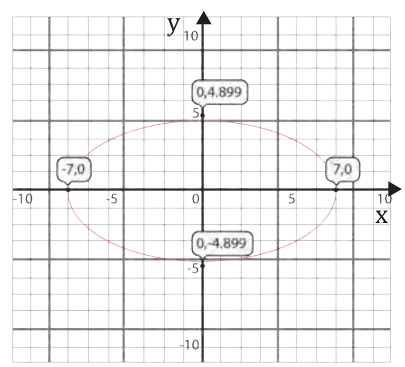


Fig. 14

Actividades

9. Sea la ecuación $4x^2 + 25y^2 = 100$, **determina** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.

10. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-8, 0)$ y $(8, 0)$ y sus focos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$.

11. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ y sus focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

2.2. Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal *y*

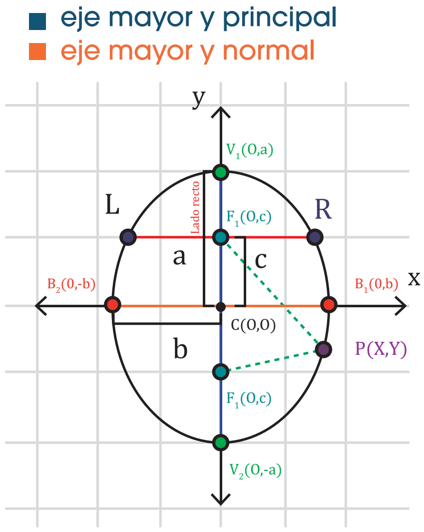


Fig. 15.

En las elipses con centro en el origen y eje de simetría x se cumple que:

- Centro (0,0)
- V_1 (0, a); V_2 (0, -a)
- Cortes con los ejes B_1 (b, 0); B_2 (-b, 0)
- Focos F_1 (0, -c); F_2 (0, c)
- Eje focal y
- Eje normal x
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Aplicamos el mismo procedimiento para obtener la ecuación de la elipse; debemos partir desde su definición, es decir $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, para ello conseguimos la distancia de un punto cualquiera P (x, y) a los focos F_1 (-c, 0) y F_2 (c, 0).

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d(P, F_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} \qquad d(P, F_2) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2}$$

Sumamos las distancias e igualamos a 2a

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} = 2a$$

Resolvemos las raíces

$$(\sqrt{(x^2 + (y + c)^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + (y - c^2})^2$$

$$x^2 + (y + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x^2 + (y - c)^2)} + x^2 + (y - c)^2$$

Desarrollamos los binomios que se presentan en ambos lados de la ecuación y eliminamos términos semejantes.

$$x^2 + y^2 + 2yc + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + y^2 - 2yc + c^2$$

$$4yc - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Extraemos factor común y simplificamos

$$-4(-yc + a^2) = -4a\sqrt{(x^2 + (y - c)^2}; \qquad (a^2 - yc) = a\sqrt{(x^2 + (y - c)^2};$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(a^2 - xc)^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2)^2}; \quad a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

Excluimos términos semejantes, agrupamos los términos que tengan x e y a un solo lado de la ecuación, factorizamos.

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - y^2c^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2)$$

Tenemos que la distancia del punto B_1 $(0, b)$ a cada foco es a. Por lo tanto, seguimos esta ecuación pitagórica y despejamos b^2.

$a^2 = b^2 + c^2$; $b^2 = a^2 - c^2$;

Sustituimos todos los $(a^2 - c^2)$ que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$a^2 b^2 = a^2x^2 + b^2y^2$; $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2 b^2$

Finalmente dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos.

$\frac{a^2x^2}{a^2b^2} + \frac{b^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$; $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ecuación de la elipse con eje focal y

Ejemplo 11

Hallemos los elementos de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$

Primero: Encontramos a y b, luego sustituimos en las coordenadas de V y B.

$a^2 = 25$; $a = 5$ entonces los vértices serán $V_1(0, 5)$; V_2 $(0, -5)$

$b^2 = 16$; $b = 4$ entonces B_1 $(4,0)$; B_2 $(-4, 0)$

Segundo: El valor de c lo conseguimos despejando de la ecuación

$a^2 = b^2 + c^2$

$c=\sqrt{(a^2 - b^2)}$; $c=\sqrt{(25 - 16)}$; $c=\sqrt{9}$, $c = 3$ entonces los focos serán

F_1 $(0, 3)$; F_2 $(0, -3)$

longitud eje mayor = $2a$; longitud eje mayor = 10

longitud eje menor = $2b$; longitud eje menor = 8

lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(4)^2}{5}$; $LR = \frac{32}{5}$; $LR = 6,4$

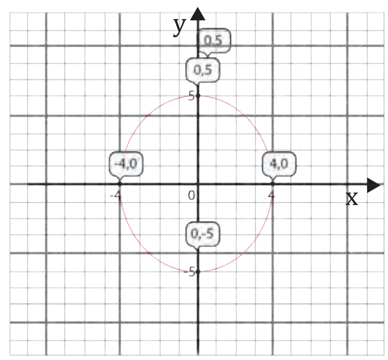


Fig. 16.

Ejemplo 12

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ y sus focos $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Según los vértices $(0, 3)$ y $(0, -3)$ entonces $a = 3$ y los focos $(0, 2)$ y $(0, -2)$, $c = 2$.

Ahora según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de b.

$b =\sqrt{(a^2 - c^2)}$, $b =\sqrt{(3^2 - 2^2)}$ entonces $b = \sqrt{5}$.

Ahora, reemplazamos en la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$,

Resulta: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$,

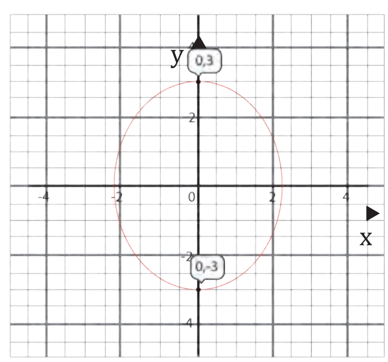


Fig. 17.

Actividades

12. Dada la ecuación $25x^2 + 4y^2 = 100$, **determina** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.

13. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y sus focos $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

2.3. Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x

En la elipse que se muestra en la gráfica se tiene que:

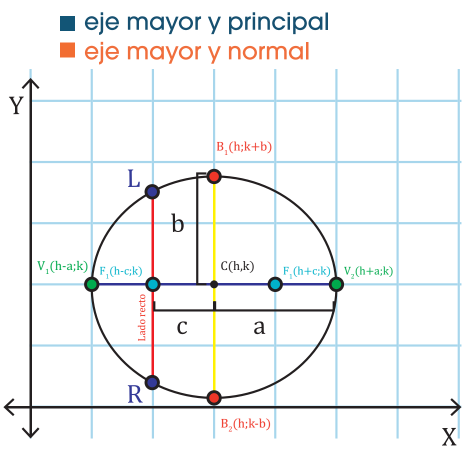


Fig. 18

- Centro (h, k)
- V_1 $(h - a, k)$; V_2 $(h + a, k)$
- Cortes con los ejes

  B_1 $(h, b + b)$; B_2 $(h, k - b)$
- Focos F_1 $(h - c, k)$; F_2 $(h + c, k)$
- Eje focal $y = k$
- Eje normal paralelo a y
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto $LR= \frac{2b^2}{a}$

Para la deducción de la ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) se debe realizar una traslación de ejes, y de ello obtenemos que: $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2}$, donde $a > b > 0$

Al igual que en las anteriores ecuaciones de elipse, aquí también utilizamos la fórmula pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$

2.4. Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y

En esta elipse, se cumple que:

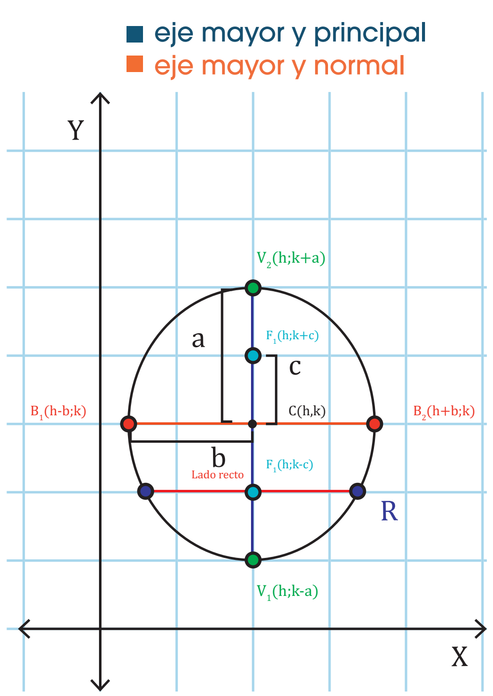


Fig. 19.

- Centro (h, k)
- V_1 $(h - a, k)$; V_2 $(h, k + a)$
- Cortes con los ejes

  B_1 $(h - b; k)$; B_2 $(h + b, k)$
- Focos F_1 $(h, k - c)$; F_2 $(h, k + c)$
- Eje focal $x = h$
- Eje normal paralelo ax
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto $LR= \frac{2b^2}{a}$

Se aplica el proceso de traslación de ejes para conseguir la ecuación canónica de centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y

Entonces: $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ donde $a > b > 0$

Ejemplo 13

Determinemos la ecuación de la elipse con centro $(-2 , 2)$, cuyos vértices son $(-2, 8)$ y $(-2, -4)$ y además el eje menor es 10.

Solución: Es notable que la primera componente no cambia (-2), esta observación evidencia que la elipse se encuentra paralela al eje y. Entonces:

V_1 $(h, k + a)$ se relaciona con $(- 2, 8)$ entonces $h = -2$ y $k + a = 8$
V_2 $(h, k - a)$ se relaciona con $(-2, -4)$ entonces $h = -2$ y $k - a = -4$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones $k + a = 8$ y $k - a = - 4$

$$\begin{array}{l} k + a = 8 \\ \underline{k - a = -4} \\ 2k = 4 \end{array}$$

Entonces $k = 2$ y $a = 6$

Si el eje menor es 10, tenemos que $2b = 10$ por lo cual $b = 5$.
Empleamos la fórmula de la elipse paralela al eje y que se ubica fuera del origen:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x + 2)^2}{36} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1$$

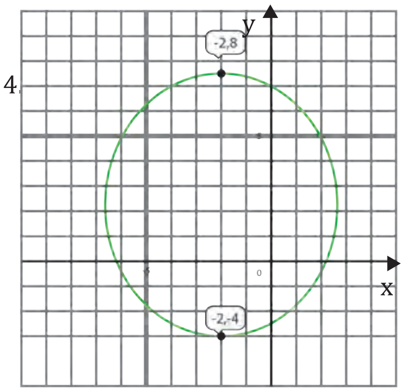


Fig. 20.

Ejemplo 14

Determinemos la ecuación de la elipse con centro $(-3, 4)$, cuyo eje mayor es paralelo al eje horizontal y el valor de la excentricidad es $\frac{2\sqrt{6}}{7}$

Solución: Con el valor de la excentricidad, concluimos que $a = 7$ y $c = 2\sqrt{6}$.
Calculamos el valor de b con la expresión: $b^2 = a^2 - c^2$
$b^2 = 49 - 24$, entonces $b = 5$. Entonces:
V_1 $(h - a, k) \longrightarrow (-10, 4)$
V_2 $(h + a, k) \longrightarrow (4, 4)$

Empleamos la fórmula de la elipse paralela al eje x que se ubica fuera del origen:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x + 3)^2}{49} + \frac{(y - 4)^2}{25} = 1$$

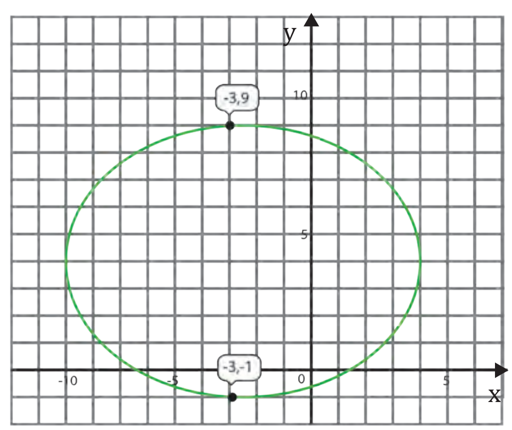


Fig. 21.

Actividades

14. Una elipse se describe según la ecuación $\frac{(x - 2)^2}{100} + \frac{(y - 1)^2}{36} = 1$, **halla** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, el valor de la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.

15. **Determina** la ecuación de la elipse con centro $(3, 3)$, cuyo eje mayor es paralelo al eje vertical y el valor de la excentricidad es $\frac{4}{5}$

Obtención de la ecuación canónica de la elipse a partir de la ecuación general

Sea la ecuación general de un lugar geométrico, $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$; si los coeficientes de A y B son del mismo signo, representa una elipse con eje paralelo al eje horizontal o vertical.

Ejemplo 15

Sea la ecuación $6x^2 + 9y^2 - 96x - 36y - 36 = 0$, hallemos la ecuación canónica de la elipse, determinemos las coordenadas del centro, vértices, focos, longitudes de los lados rectos, el valor de la excentricidad y la representación gráfica.

Solución:

$16x^2 + 9y^2 - 96x - 36y + 36 = 0$	Dato
$(16x^2 - 96x) + (9y^2 - 36y) = -36$	Agrupando los términos según x e y.
$16(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36$	Factor común numérico
$16(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 144 + 36$	Completando los trinomios
$16(x - 3)^2 + 9(y^2 - 2)^2 = 144$	Factorando trinomios y realizando operaciones
$\frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y-2)^2}{144} = \frac{144}{144}$	Dividiendo cada término para 144
$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$	Simplificando las fracciones

- Elipse de eje mayor paralelo al eje y.
- Valores de a, b y c correspondientemente: $4, 3$ y $\sqrt{7}$.
- **Centro** $(h, k) \longrightarrow$ Centro $(3, 2)$
- **Vértices**: $(h, k + a) \longrightarrow (3, 6)$
  $(h, k - a) \longrightarrow (3, -2)$
- **Focos**: $(h, k + c) \longrightarrow (3, 2 + \sqrt{7})$
  $(h, k - c) \longrightarrow (3, 2 - \sqrt{7})$
- Lado recto $LR = \frac{16(x-3)^2}{144}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

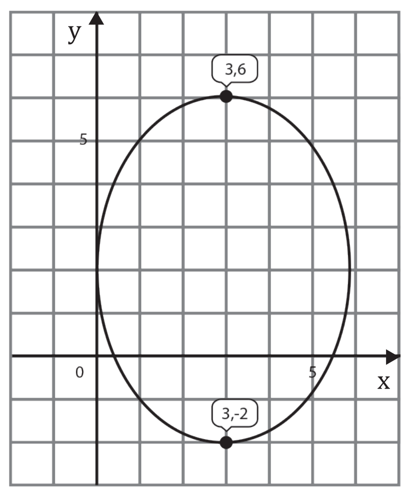


Fig. 22.

Actividades

16. Considerando las siguientes ecuaciones, **determina** la ecuación canónica de la elipse, estableciendo las coordenadas del centro, vértices, focos, longitudes de los lados rectos el valor de la excentricidad; así como la representación gráfica.

a. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

b. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

c. $16x^2 + 4y^2 + 32x + 16y - 32 = 0$

3. PARÁBOLA

3.1. Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que tienen una distancia igual a una recta fija, denominada directriz, y a un punto fijo, llamado foco. Los elementos que podemos apreciar en la parábola son los siguientes:

Eje focal: También nombrado eje de simetría, es la recta que pasa por el foco e intersecta perpendicularmente a la directriz.

Directriz: Recta cuya distancia a cualquier punto de la parábola es equidistante a la distancia de ese mismo punto al foco.

Vértice: Es el punto V en el que se une la parábola con el eje focal.

Foco: Es el punto fijo F que se halla sobre el eje de simetría.

Lado recto: Es la cuerda paralela a la directriz que pasa por el foco, su distancia es de $4p$.

Parámetro: Designado comúnmente con la letra p, se refiere a la distancia que existe entre el vértice y el foco, la cual es igual a la distancia entre el vértice y la directriz.

3.2. Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y

En la parábola con eje de simetría "x" que se presenta a continuación, tenemos las siguientes características:

- Coordenadas del vértice $(0, 0)$
- Las coordenadas del foco son $(p, 0)$
- Directriz $x = -p$
- Lado recto es igual a $|4p|$
- Si $p > 0$, la parábola tiene su foco a la derecha del vértice y sus ramas se abren a la derecha.
- Si $p < 0$, la parábola tiene su foco a la izquierda del vértice y sus ramas se abren a la izquierda.

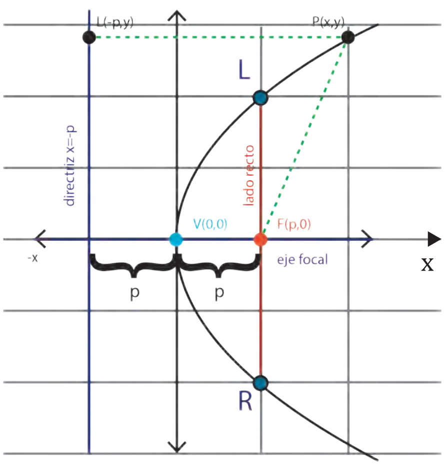


Fig. 23.

Por definición de parábola tenemos que la distancias de un punto al foco $(p, 0)$ y a la directriz $(-p, y)$ serán las mismas, por ello, igualamos las ecuaciones obtenidas y resolvemos.

$$d\,(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d\,(P, L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$$

$$d\,(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} \qquad d\,(P, F) = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$$

$$d\,(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \qquad d\,(P, F) = x + p$$

$$(x + p)^2 = \sqrt{(x - p)^2 + y^2)^2}$$

$y^2 = 4px$; $4p$ representa el lado recto de la parábola

3.3. Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x

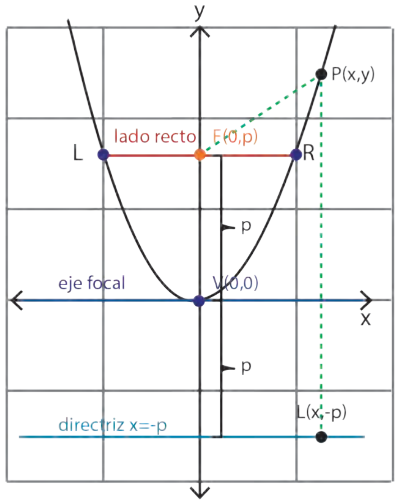


Fig. 24.

En la parábola con vértice en el origen y eje focal "y" se tiene que:

- Coordenadas del vértice $(0, 0)$
- Las coordenadas del foco son $(0, p)$
- Directriz $y = -p$
- Lado recto es igual a $|4p|$
- Si $p > 0$, la parábola tiene su foco arriba del vértice y sus ramas se abren hacia arriba.
- Si $p < 0$, la parábola tiene su foco abajo del vértice y sus ramas se abren hacia abajo.

Realizamos el mismo proceso de distancias para obtener la ecuación, pero en este caso, tendremos diferentes coordenadas debido a que la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo; así tenemos que $F\ (0, p)$ y el punto $L(x, -p)$

$$d\ (P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d\ (P, L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$$

$$d\ (P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} \qquad d\ (P, L) = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

$$d\ (P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \qquad d\ (P, L) = y + p$$

$$y + p = \sqrt{(x^2 + (y - p)^2}$$

$$(y + p)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y - p)^2)}\right)^2$$

$x^2 = 4py$; $4p$ representa el lado recto de la parábola

Ejemplo 16

Determinemos la ecuación de la parábola descrita por el foco de coordenadas $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ y vértice en el origen $(0, 0)$

Recordamos que cuando el foco es $(0, p)$ utilizamos la ecuación $x^2 = 4yp$, reemplazamos el parámetro en la expresión.

$x^2 = 4py$; $x^2 = 4\left(-\frac{2}{3}\right)y$: $x^2 = -\frac{8}{3}y$

Ejemplo 17

Encontremos la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen, de eje de simetría x y pasa por el punto $(2, -4)$.
El eje focal es el eje de las x, por lo que tenemos que aplicar la siguiente ecuación.
$y^2 = 4px$; como el punto $(2, -4)$ pertenece a la curva, debemos sustituirlo en las variables x e y para despejar p y determinar su valor.

$y^2 = 4px$; $4p(2) = (-4)^2$; $8p = 16$; $p = 2$

La ecuación que describe la parábola es $y^2 = 8x$

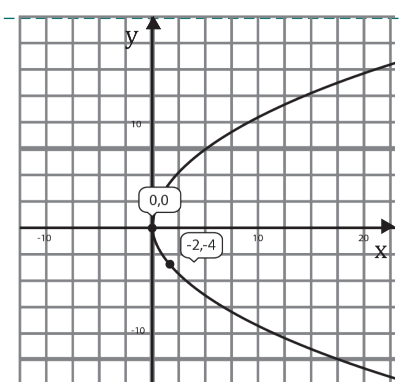


Fig. 25.

3.4. Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje y.

La parábola que se muestra en la gráfica tiene las siguientes características:

- Coordenadas del vértice (h, k)
- Las coordenadas del foco son $(h + p, k)$
- Ecuación de la directriz $x = h - p$
- Ecuación del eje focal $y = k$
- Longitud del lado recto $LR = |4p|$
- Si $p > 0$ las ramas de la parábola abren a la derecha.
- Si $p < 0$ las ramas de la parábola abren a la izquierda.

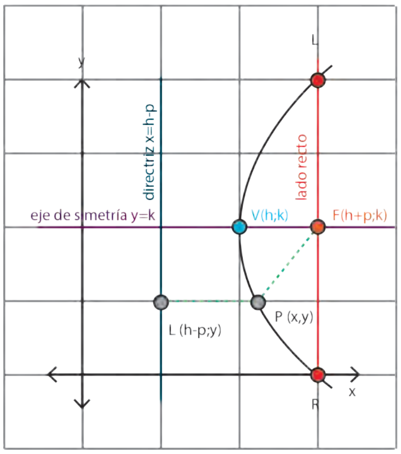


Fig. 26.

Recordamos que para obtener la ecuación canónica hay que igualar las distancias que se obtienen desde un punto de la parábola $P\ (x, y)$ al foco $(h + p;\ k)$ y a la directriz $L\ (h - p;\ y)$. Así tenemos que:

$$d\ (P, L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d\ (P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$$

$$d\ (P, L) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} \qquad d\ (P, F) = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

$$d\ (P, L) = h - p - x$$

Igualamos distancias y resolvemos

$$(h - p - x)^2 = \left(\sqrt{(h + p - x)^2 + (k - y)^2)}\right)^2$$

$$h^2 + p^2 + x^2 - 2hp - 2hx - 2px = h^2 + p^2 + x^2 + 2hp - 2hx - 2px + k^2 - 2ky + y^2$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$$

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ecuación canónica

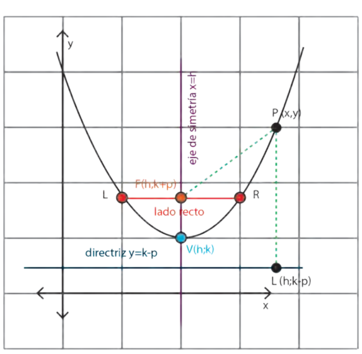


Fig. 27.

3.5. Ecuación canónica de la parábola con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y.

En la parábola con eje focal paralelo al eje y que se presenta, se tiene que:

- Vértice (h, k)
- Coordenadas del foco es $(h;\ k + p)$
- Ecuación de la directriz $y = k - p$
- Ecuación del eje focal $x = h$
- Longitud del lado recto $LR = |4p|$
- Si $p > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba.
- Si $p < 0$, las ramas de la parábola abren hacia abajo.

Recordamos que, para obtener la ecuación canónica, hay que igualar las distancias que se obtienen desde un punto de la parábola $P(x, y)$ al foco $(h; k + p)$ y a la directriz $L(x; k - p)$. Así, tenemos que:

$$d\,(P, L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d\,(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d\,(P, L) = \sqrt{(x - x)^2 + (k - p - y)^2} \qquad d\,(P, F) = \sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}$$

$$d\,(P, L) = k - p - y$$

Igualamos distancias y resolvemos

$$(k - p - y)^2 = \left(\sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}\right)^2$$

$$k^2 + p^2 + y^2 - 2kp - 2ky - 2py = h^2 - 2hx + x^2 + k^2 + p^2 + y^2 + 2kp - 2ky - 2py$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$$

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ecuación canónica

Ejemplo 18

Determinemos la ecuación de la parábola que cumple con las condiciones dadas: vértice $(-3,-2)$ y ecuación de la directriz es $y - 3 = 0$.

Solución: La ecuación de la directriz es $y = k - p$, y disponemos del dato $y - 3 = 0$, luego, se concluye que $3 = k - p$, pero, según el vértice $k = -2$ entonces despejamos p.

$3 = k - p$; $3 = -2 - p$ donde $-p = 5$ entonces $p = -5$

Así, con el valor de p y las coordenadas del vértice, reemplazamos en la ecuación:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$; $(x + 3)^2 = 4(-5)(y + 2)$; $(x + 3)^2 = -20(y + 2)$

Ejemplo 19

Hallemos los elementos de la parábola que corresponde a la siguiente ecuación $(y - 4)^2 = 8(x + 2)$, luego realicemos la representación gráfica.

Datos: $(y - 4)^2 = 8(x + 2)$ V= ? F= ? directriz = ? eje focal = ? LR = ?

Solución:

Comparamos con la ecuación general $(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$, por lo que:

$4p = 8 \rightarrow p = 2$

- Vértice $(-2, 4)$
- Coordenadas del foco $(0, 4)$
- Ecuación de la directriz $x = -4$
- Ecuación del eje focal $y = 4$
- Longitud del lado recto $LR = 8$
- Como $p > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba.

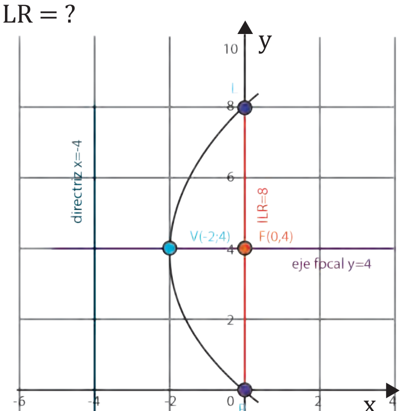


Fig. 28.

Actividades

17. **Representa** gráficamente las parábolas.

a. $(x - 3)^2 = -3(y + 4)$ b. $y^2 = -8(y + 3)$ c. $x^2 = -\frac{1}{2}(y - 1)$

18. **Determina** la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco sean $V\,(3, 4)$; $F(3, 6)$

Obtención de la ecuación canónica de la parábola a partir de la ecuación general

La ecuación general de la parábola ubicada fuera del origen se expresa como:

$x^2 + Ax + By + F = 0$ donde $A \neq 0$ y el eje de simetría es paralelo al eje vertical y.

$y^2 + Ax + By + F = 0$ donde $A \neq 0$ y el eje de simetría es paralelo al eje horizontal x.

Ejemplo 20

Sea la ecuación $y^2 + 8y - 16x + 64 = 0$. Determinemos la ecuación canónica de la parábola, las coordenadas del vértice , foco, directriz y la representación gráfica.

Solución:

$y^2 + 8y - 16x + 64 = 0$	Dato
$y^2 + 8y = 16x - 64$	Agrupando los términos según y
$y^2 + 8y + 16 = 16x - 64 + 16$	Completando los trinomios
$(y + 4)^2 = 16x - 48$	Factorando trinomios y realizando operaciones
$(y + 4)^2 = 16(x - 3)$	Factor común numérico
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	Ecuación canónica

Al comparar tenemos que : $h = 3, k = -4 , p = 4$

- Vértice $(h, k) \rightarrow (3, -4)$
- Foco $(h + p, k) \rightarrow (7, -4)$
- Directriz $x = h - p; x = 3 - 4; x = -1$
- Eje de simetría: $y = k; y = -4$
- Lado recto $LR = 4p; LR = 4(4); LR = 16$

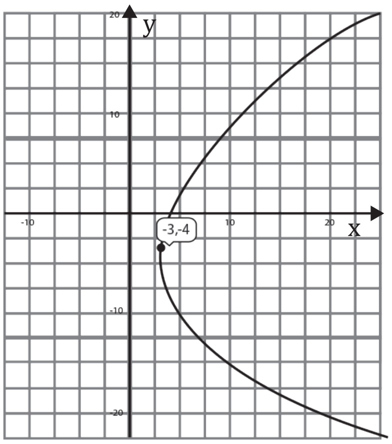


Fig. 29.

Actividades

19. Sean las ecuaciones generales de parábolas, **determina** la ecuación canónica y defínelas los elementos vértice, foco, lado recto, directriz y eje de simetría, así como la representación gráfica.

    a. $x^2 - 6x + 12y + 21 = 0$

    b. $y^2 + 2y - 16x + 1 = 0$

    c. $x^2 + 4x + 20y - 96 = 0$

20. Considerando las ecuaciones canónicas de parábolas, **determina** la ecuación general.

    a. $(x - 3)^2 = 8 (y - 2)$

    b. $(x + 4)^2 = -12 y$

    c. $(y - 2)^2 = 24 (x + 6)$

    d. $(y + 5)^2 = 36 (x - 1)$

4. LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a los puntos fijos denominados focos (F_1 y F_2) no cambia. Así, tenemos que un punto cualesquiera P (x, y) pertenece a la hipérbola si $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ en donde a es un número real positivo. Los elementos que se aprecian son:

- **Centro**: Punto de intersección de los ejes o punto medio del eje transverso.
- **Vértices**: Puntos de intersección de la hipérbola con los ejes; entonces (V_1 y V_2) son los puntos que cortan al eje focal y (B_1 y B_2) se consiguen como intersección del eje imaginario de los vértices con la hipérbola.
- **Focos**: Son los puntos fijos (F_1 y F_2) que se encuentran sobre el eje de simetría.
- **Asíntotas**: Son dos rectas que se acercan a la hipérbola sin llegar a tocarla, pues se extiende indefinidamente.
- **Eje focal**: Conocido como eje de simetría o principal, es la recta que pasa por los focos.
- **Eje normal**: Recta perpendicular al eje de simetría.
- **Eje conjugado**: Es el segmento perpendicular al eje transverso, su distancia es 2b
- **Eje transverso**: Segmento que une los puntos (V_1 y V_2) de la hipérbola, su distancia es 2a.
- **Lado recto**: Segmento de recta que pasa por uno de los focos y une a dos puntos de la hipérbola.

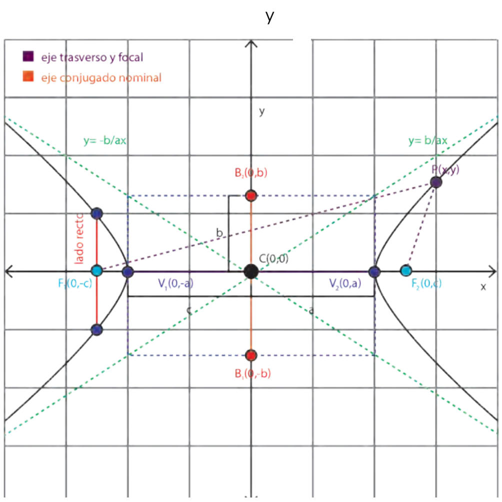


Fig. 30.

4.1. Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a x

En la hipérbola que se muestra en la gráfica con centro en el origen y eje de simetría x, se cumple que:

- V_1 (-a, 0); V_2 (a, 0)
- Cortes con ejes B_1 (0-, b); B_2 (0, b)
- Focos F_1 (-c, 0); F_2 (c, 0)
- Asíntotas $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$
- Eje focal x
- Eje normal y
- Longitud eje conjugado 2
- Longitud eje transverso 2a
- Longitud del lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}$ y esta debe ser >1
- Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la expresión $c^2 = a^2 + b^2$.

Para hallar la ecuación de la hipérbola hay que iniciar desde su definición, es decir $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ para ello conseguimos la distancia de un punto cualquiera P (x, y) a los focos F_1 (-c, 0) y F_2 (c, 0).

$d(P, F_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\qquad$ $d(P, F_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(P, F_1) = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$ $\qquad$ $d(P, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$

Restamos las distancias e igualamos a 2a; $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$

Resolvemos las raíces: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}^2 = (2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

Desplegamos los binomios que se presentan en ambos lados de la ecuación y descartamos términos semejantes.

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Desarrollamos factor común y simplificamos.

$$4(xc - a^2) = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\ ; \quad (xc - a^2) = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos.

$$(xc - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x - c)^2 + y^2)}\right)^2; \quad x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 - x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

Descartamos términos semejantes, agrupamos los términos que tengan x e y a un solo lado de la ecuación, factorizamos.

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4\ ; \ x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Tenemos que la distancia del punto $B_1\ (0, b)$ a cada foco es a. Por lo tanto, aplicamos teorema de Pitágoras y despejamos b^2.

$$c^2 = a^2 + b^2\ ; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Sustituimos todos los $(c^2 - a^2)$ que tengamos en la ecuación anterior por b^2.

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2\ ; \quad x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos.

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}\ ; \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ecuación de la hipérbola con eje focal x

4.2. Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a y

En la hipérbola con centro en el origen y eje de simetría y se cumple que:

- $V_1\ (0, -a);\ V_2\ (0, a)$
- Cortes con ejes $B_1\ (-b, 0);\ B_2\ (b, 0)$
- Focos $F_1(0, -c);\ F_2\ (0, c)$
- Asíntotas $y = \frac{a}{b}x;\ y = -\frac{a}{b}x$
- Eje focal x y eje normal y
- Longitud eje conjugado 2b
- Longitud eje transverso 2a
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- La excentricidad: $0 < c\ ;\ e > 1$

  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

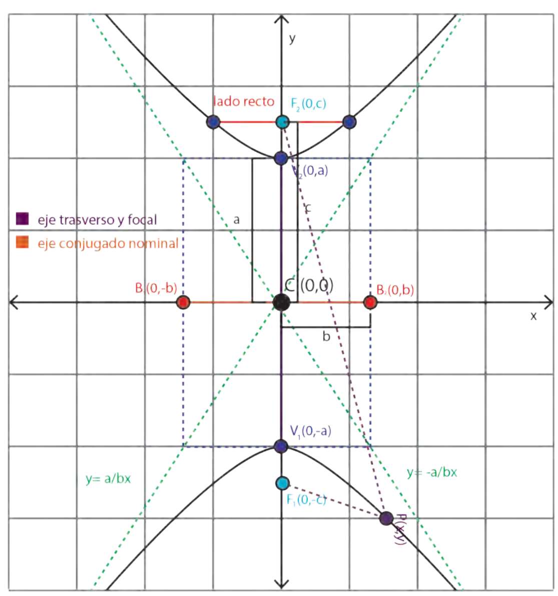


Fig. 31.

- Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$.

Aplicamos el mismo procedimiento para obtener la ecuación de la elipse; iniciamos desde su definición, es decir, $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ y luego de ello, conseguimos la distancia de un punto cualquiera $P\ (x, y)$ a los focos $F_1\ (0, -c)$ y $F_2\ (0, c)$.

$$d\ (P, F_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad d\ (P, F_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d\ (P, F_1) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} \qquad d\ (P, F_2) = \sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}$$

Hallamos la diferencia entre las distancias e igualamos a 2a.

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} - \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} = 2a$$

Resolvemos las raíces.

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2)^2} = (2a + \sqrt{x^2 + (y - c)^2)^2} = 2a$$

$$x^2 + (y + c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2$$

Desarrollamos los productos notables y reducimos términos semejantes.

$$x^2 + y^2 + 2yc + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x^2 + (y - c)^2} + x^2 + y^2 - 2yc + c^2$$

$$4yc - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Extraemos el factor común y simplificamos.

$$4(yc - a^2) = 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\ ; \quad (yc - a^2) = a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos.

$$(yc - a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\right)^2; \quad y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 = a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2)$$

$$y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2$$

Excluimos términos semejantes, agrupamos los términos que tengan x e y a un solo lado de la ecuación, factorizamos.

$$y^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4\ ; \quad y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2\ (c^2 - a^2)$$

Tenemos que la distancia del punto $B_1\ (0, b)$ a cada foco es a. Por lo tanto, seguimos esta ecuación pitagórica y despejamos b^2.

$$c^2 = a^2 + b^2\ ; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Sustituimos todos los $(c^2 - a^2)$ que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos.

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}\ ; \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$ ecuación de la hipérbola con eje focal y

4.3. Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h, k) y eje focal paralelo a x

En la hipérbola que se muestra en la gráfica, con centro en el origen y eje de simetría x se cumple que:

- Centro (h, k)
- $V_1\ (h - a, k);\ V_2\ (h + a, k)$
- Cortes con ejes $B_1\ (h, k - b);\ B_2\ (h, k + b)$
- Focos $F_1 (h - c, k); F_2 (h + c, k)$
- Eje focal x y eje normal y
- Longitud eje conjugado 2b
- Longitud eje transverso 2a
- Asíntotas $y - k = \frac{b}{a}(x - h);\ y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$

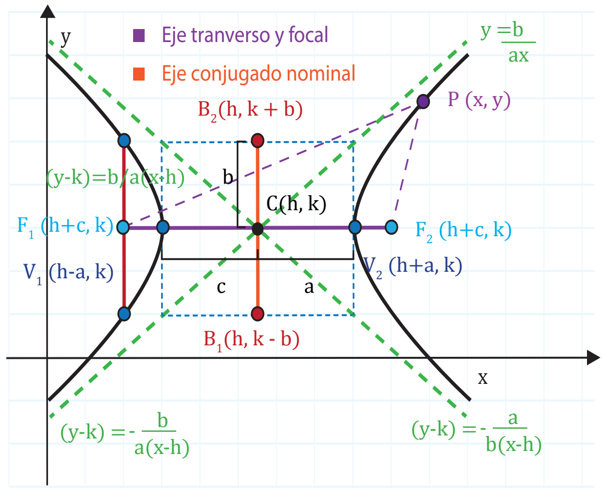


Fig. 32.

- La excentricidad: $e > 1$, además que c debe ser menor que a. $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
- Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$.

La fórmula que define a la hipérbola con centro (h, k) y eje focal paralelo al eje x es:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$, donde $a, b, c > 0; c > a$.

4.4. Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h, k) y eje focal paralelo a y

En la hipérbola que se muestra en la gráfica, con centro en el origen y eje de simetría x se cumple que:

- Centro (h, k)
- $V_1\ (h, k - a);\ V_2\ (h, k + a)$
- Cortes con ejes $B_1\ (h + b, k);\ B_2\ (h - b, k)$
- Focos $F_1 (h, k - c); F_2 (h, k + c)$
- Asíntotas $y - k = \frac{a}{b}(x - h);\ y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$
- Eje focal y y eje normal x.
- Longitud eje conjugado 2b.
- Longitud eje transverso 2a.
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$

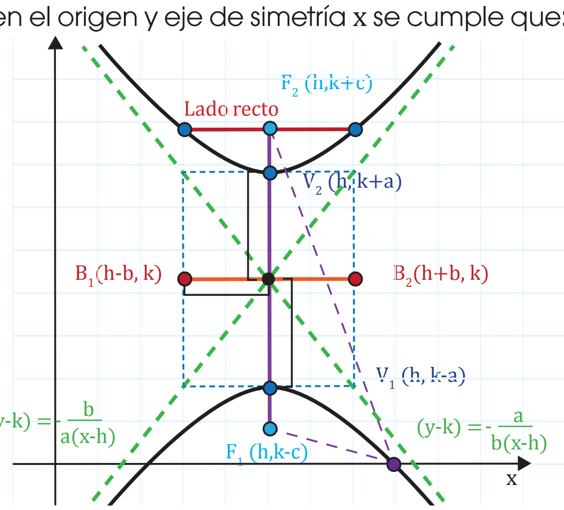


Fig. 33.

- La excentricidad debe ser siempre menor que uno y mayor que 0, además que c debe ser menor que a. La ecuación que la representa es: $e = \frac{c}{a}$
- Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$.

La fórmula que define a la hipérbola con centro (h, k) y eje focal paralelo al eje x es:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$, donde $a, b, c > 0; c > a$.

Ejemplo 21

Dada la siguiente ecuación $4x^2 - 9y^2 = 36$, determinemos los vértices focos, luego, grafiquemos la hipérbola.

Solución: Dividimos cada elemento de la ecuación para 36, con la finalidad de obtener la unidad en el lado derecho de la ecuación.

$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$ luego obtenemos: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Entonces la hipérbola tiene eje focal x. Comparando con la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ concluimos que:

$a^2 = 9$ y que $b^2 = 4$, por lo que $a = 3$ y $b = 2$.

Calculamos $c = \sqrt{(a^2+b^2)}$, $c = \sqrt{(3^2 + 2^2)}$, $c = \sqrt{(9 + 4)}$, $c = \sqrt{13}$.

Vértices: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

Focos: $(\sqrt{13}, 0)$ y $(-\sqrt{13}, 0)$

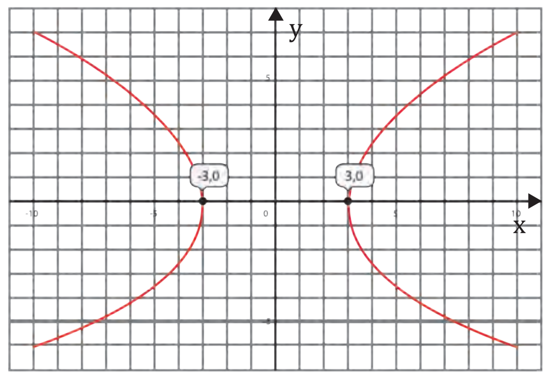


Fig. 34.

Ejemplo 22

Sea la ecuación $36x^2 - 16y^2 - 216x - 32y - 268 = 0$, hallemos la ecuación canónica de la hipérbola, determinemos las coordenadas del centro, vértices y focos, luego representemos la hipérbola.

Solución:

$36x^2 - 16y^2 - 216x - 32y - 268 = 0$	Dato
$(36x^2 - 216x) - (16y^2 + 32y) = 268$	Agrupando los términos según x e y
$36(x^2 - 6x) - 16(y^2 + 2y) = 268$	Factor común numérico
$36(x^2 - 6x + 9) - 16(y^2 + 2y + 1) = 268 + 324 - 16$	Completando los trinomios
$36(x - 3)^2 - 16(y + 1)^2 = 576$	Factorando trinomios y realizando operaciones
$\frac{36(x-3)^2}{576} - \frac{16(y+1)^2}{576} = \frac{576}{576}$	Dividiendo cada término para 576
$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$	Simplificando las fracciones

Hipérbola con eje focal en el eje x.

- Valores de a, b y c: $4, 6$ y $2\sqrt{13}$
- Centro $(h, k) \longrightarrow$ Centro $(3, -1)$
- Vértices: $(h + a, k) \longrightarrow (7, -1)$
  $(h - a, k) \longrightarrow (-5, -1)$
- Focos: $(h + c, k) \longrightarrow (3 + 2\sqrt{13}, -1)$
  $(h - c, k) \longrightarrow (3 - 2\sqrt{13}, -1)$
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(36)}{4}$; $LR = 18$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

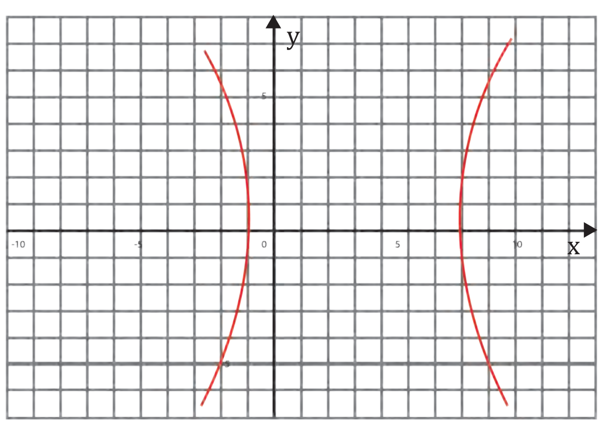


Fig. 35.

5 Resumen

Parábola

Primer caso: e = eje OX y F = $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

En este caso, la directriz d es $x = -\frac{p}{2}$

Como $d(P, F) = d(P, d)$:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Operando, se obtiene: $y^2 = 2px$

Segundo caso: e = eje OX y F = $\left(\frac{-p}{2}, 0\right)$

En este caso, la directriz d es $x = \frac{p}{2}$

Como $d(P, F) = d(P, d)$:

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x - \frac{p}{2}\right|$$

Operando, se obtiene: $y^2 = -2px$

Tercer caso: e = eje OY y F= $\left(0, \frac{p}{2}\right)$

En este caso, la directriz d es $y = -\frac{p}{2}$

Como $d(P, F) = d(P, d)$:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

Operando, se obtiene: $x^2 = 2py$

Cuarto caso: e= eje de ordenadas y F = $\left(0, \frac{-p}{2}\right)$

En este caso, la directriz d es $y = -\frac{p}{2}$

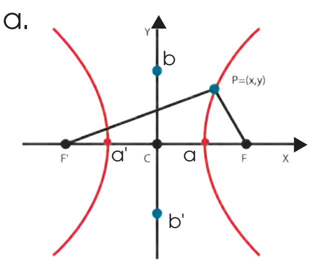
Como $d(P, F) = d(P, d)$:

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y - \frac{p}{2}\right|$$

Operando, se obtiene: $x^2 = -2py$

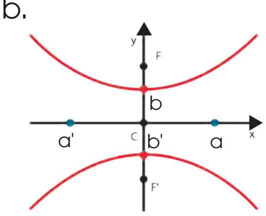
Hipérbola

a.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b.

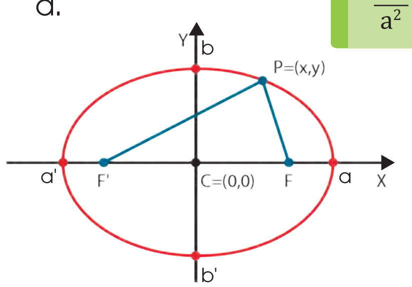


$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Elipse

a.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



b.

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

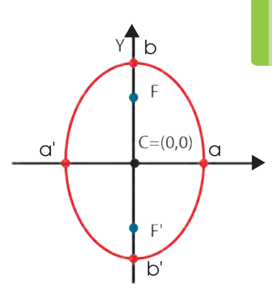


Tabla 1.

A

1. **Determina** la ecuación de la elipse con eje focal en el eje x cuyo centro coincide con el origen y pasa por los puntos $A\left(3,-\frac{13}{3}\right)$ y $B\left(\frac{18}{5},4\right)$

Solución

Solución: Según la ecuación de la elipse con eje focal en el eje x, reemplazamos los valores que obtenemos de acuerdo al enunciado del ejercicio.

En el punto $A\left(3,-\frac{13}{3}\right)$, $X_A = 3$ y $Y_A = -\frac{13}{3}$ y en $B\left(\frac{18}{5},4\right)$. $X_B = \frac{18}{5}$ y $Y_B = 4$, para obtener

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \begin{cases} \text{En el punto A: } \dfrac{(3)^2}{a^2}+\dfrac{\left(-\frac{13}{3}\right)^2}{b^2}=1 \quad \text{Resolviendo} \rightarrow \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{\frac{169}{9}}{b^2}=1 \\ \text{En el punto B: } \dfrac{\left(\frac{18}{5}\right)^2}{a^2}+\dfrac{(4)^2}{b^2}=1 \quad \text{Resolviendo} \rightarrow \dfrac{\frac{324}{25}}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenido, se tiene que $a = 6$ y $b = 5$. Así, reemplazando a y b en la ecuación de la elipse con eje focal x, tenemos: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

2. **Determina** la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2,3)$ y $Q(0,5)$ y cuyo centro está sobre la recta $x - y + 3 = 0$.

Solución

Primero: Establecemos un sistema de ecuaciones con los puntos P y Q en la ecuación canónica; luego resolvemos los productos notables y ordenamos algebraicamente.

$(2-h)^2+(2-k)^2=r^2 \rightarrow h^2+k^2-4h-4k+8=r^2$

$(0-h)^2+(5-k)^2=r^2 \rightarrow h^2+k^2-10k+25=r^2$

Segundo: Se establece $r^2 = r^2$ y se reducen los términos semejantes.

$h^2+k^2-4h-4k+8=h^2+k^2-10k+25$; $-4h-4k=17$

Tercero: Se sustituye x por h e y por k debido a que el centro de la circunferencia está sobre la recta. Luego, resolvemos el sistema de ecuaciones resultante.

$x-y+3=0 \rightarrow h-k=-3$

$-4h-4k=17$ Donde se obtiene $C\left(-\frac{29}{a^2},-\frac{5}{8}\right)$

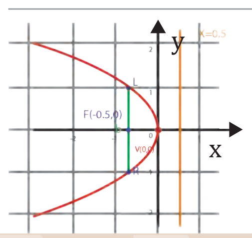
Cuarto: Reemplazamos $C\left(-\frac{29}{a^2},-\frac{5}{8}\right)$, resolvemos y obtenemos el radio.

$\left(2+\frac{29}{8}\right)^2+\left(2+\frac{5}{8}\right)^2=r^2$; $\sqrt{\frac{2025}{64}+\frac{441}{64}}=r$; $6{,}2=r$

Finalmente, reemplazamos el vértice y el radio en la ecuación. $\left(x+\frac{29}{8}\right)^2+\left(y+\frac{5}{8}\right)^2=38{,}44$

3. **Halla** los elementos de la parábola cuya ecuación es $y^2=-2x$

Solución



$4p=-2$, entonces $p=-\frac{1}{2}$.

Ahora bien, foco $(p,0)$ entonces $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Vértice $(0,0)$ Directriz es $x=-p$ entonces $x=\frac{1}{2}$

$LR=|4p|$ entonces $LR=2$

Como $p<0$ entonces las ramas de la **parábola se dirigen hacia la izquierda**.

Ejercicios y problemas

1 Circunferencia

1. **Determina** la ecuación de la circunferencia y **traza** su gráfica.
   a. $C(0, 0); r = 5$
   b. $C(4, 2); r = 4$
   c. $C(-3, 2); r = 2$
   d. $C(-4, -2); d = 8$

2. **Verifica** si el punto dado pertenece o no a la circunferencia.
   a. $P(-1, -3)$ a $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
   b. $P(0, 2)$ a $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$
   c. $P(-9, 3)$ a $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 81$
   d. $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}\right)$ a $(x - 7)^2 + y^2 = 64$

3. **Determina** las ecuaciones de la circunferencia a partir de su gráfica.

a.

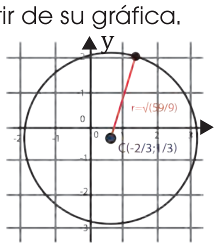


Fig. 36.

c.

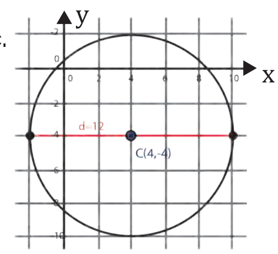


Fig. 38.

b.

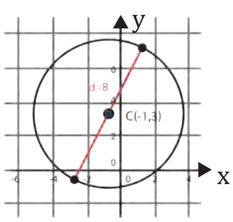


Fig. 37.

4. **Halla** la ecuación del lugar geométrico de los puntos que distan 10 metros del punto $P = (-3, 8)$.

5. **Halla** la ecuación del lugar geométrico del plano formado por los puntos que distan 7 unidades del punto $A = (-4, -5)$.

6. **Determina** las ecuaciones de las circunferencias siguientes:
   a. Centro $(2, -1)$ y radio 3.
   b. Centro $(3, 0)$ y radio 4.
   c. Centro $(-1, 5)$ y pasa por el punto $P = (-4, -6)$.

7. **Analiza** las ecuaciones canónicas de circunferencias y **determina** las coordenadas del centro y el valor del radio.
   a. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$
   b. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 36$
   c. $x^2 + (y + 5)^2 = 9$
   d. $(x + 12)^2 + y^2 = 144$

8. Dadas las ecuaciones generales, **halla** las coordenadas del centro de la circunferencia así como el valor del radio.
   a. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$
   b. $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$
   c. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
   d. $x^2 + y^2 - 121 = 0$

9. **Calcula** los valores de m para que el punto $P = (1, 1)$ pertenezca a la circunferencia descrita por $x^2 + y^2 - 2mx + 4my - 4m^2 = 0$

10. **Determina** la posición relativa de los puntos $A – (5, 4)$, $B – (-1, 1)$ y $C – (2, -1)$ respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 - 0$.

2 Elipse

28. Dadas las gráficas, **halla** la ecuación de la elipse.

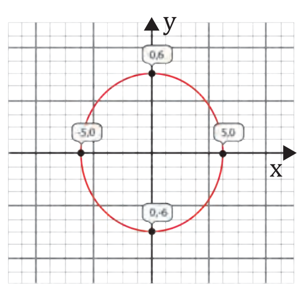


Fig. 39.

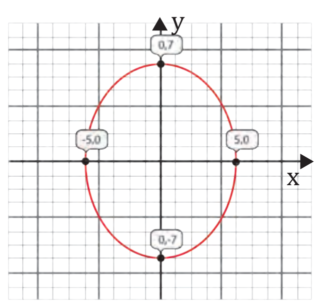


Fig. 40.

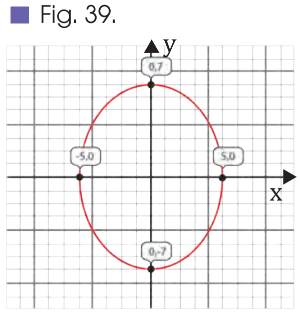


Fig. 41.

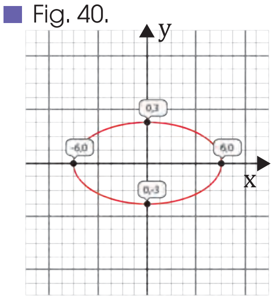


Fig. 42.

11. **Halla** los vértices, los focos y la excentricidad de siguientes elipses:

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ c. $5x^2 + 6y^2 = 30$

b. $9x^2 + 4y^2 = 36$ d. $x^2 = 4 - 2y^2$

12. **Halla** la ecuación de las elipses determinadas por las siguientes condiciones:

a. Focos $(\pm 4, 0)$. Vértices: $(0, \pm 5)$.

b. Longitud del eje mayor: 6. Longitud del eje menor: Focos en el eje X.

c. Focos: $(\pm 5, 0)$. Longitud del eje mayor: 12.

d. Extremos del eje menor: $(0, \pm 3)$. Distancia focal: 8.

e. Excentricidad: 0,8. Focos: $(\pm 1{,}5 , 0)$.

f. Corta el eje de ordenadas en los puntos $A = (0, 6)$; $A' = (0, -6)$ y la excentricidad es $e = \frac{1}{3}$

13. **Halla** la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P = (3, 1)$ y tiene sus focos en $F = (4, 0)$ y $F' = (-4, 0)$

14. **Halla** la ecuación de las elipses que satisfacen las siguientes condiciones:

a. Foco $(7, 2)$. Vértice: $(9, 2)$. Centro: $(4, 2)$.

b. Centro: $(1, 4)$. Distancia focal: 16.
Eje mayor: Paralelo al eje OX y de longitud 20.

15. **Halla** el centro y los focos de las siguientes elipses de ecuación:

a. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

b. $\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

16. La Luna describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra, que es uno de sus focos. Si la excentricidad de la órbita lunar es 0,84 y la distancia focal es de 369 200 km, **halla** la distancia máxima a la que se encuentra la Tierra de la Luna.

17. **Halla** las coordenadas del punto medio de la cuerda que determinan la recta $x + 2y - 1 = 0$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

18. **Analiza** las ecuaciones canónicas de elipses y determina las coordenadas del centro, vértice y las longitudes de los ejes mayor y menor.

a. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

b. $\frac{(x+5)^2}{81} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$

19. Dadas las ecuaciones generales, **halla** la ecuación canónica y **determina** las coordenadas del centro de la elipse y los valores de a, b y c.

a. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

b. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116$

c. $100x^2 + 81y^2 - 486y - 7371 = 0$

3 Parábola

20. **Halla** el valor del parámetro p de la parábola $x^2 = -2py$ sabiendo que el punto $P = (-6, -1)$ está contenido en ella.

21. **Halla** el foco y la directriz de las siguientes parábolas:

a. $y^2 = -8x$ c. $y = 5x^2$

b. $x^2 = 12y$ d. $8x^2 + 12y = 0$

22. **Determina** en su forma reducida las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a. $6y^2 - 12x = 0$ b. $15x^2 - = 42y$

A continuación, indica en cada caso el valor del parámetro p, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

23. **Halla** la ecuación de las parábolas que satisfacen las siguientes condiciones:

a. Vértice: $(0, 0)$. Foco: $(-2, 0)$. Directriz: $x = 2$.

b. Vértice: $(0, 0)$. Directriz: $y = 6$.

c. Foco: $(0, -5)$. Directriz: $y = 5$.

d. Vértice: $(0, 0)$. Eje de simetría: eje OY. Pasa por el punto $P = (-3, 3)$.

4 Hipérbola

24. **Analiza** las ecuaciones canónicas de las parábolas y determine las coordenadas del vértice y las longitudes de su lado recto.

a. $(x - 4)^2 = -24(y - 2)$.

b. $(y + 3)^2 = 16(x + 5)$

c. $y^2 = -20(x - 3)$

d. $x^2 = 36(y + 7)$

25. Dadas las ecuaciones generales, **halla** la ecuación canónica de la parábola y **determina** el vértice, el foco y la directriz.

26. **Halla** las ecuaciones de las hipérbolas que tienen las siguientes gráficas:

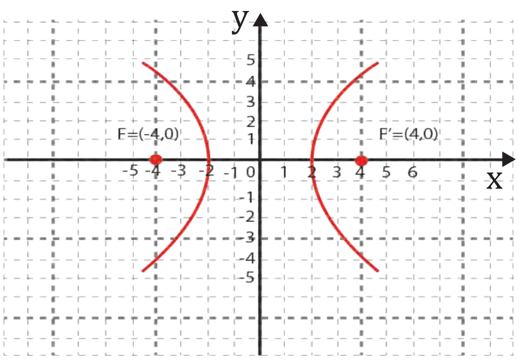


Fig. 43.

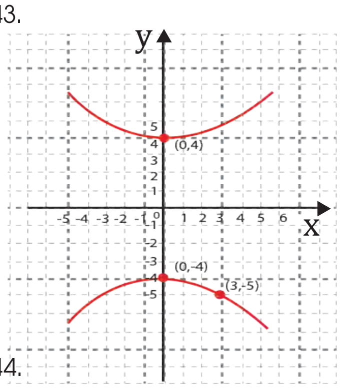


Fig. 44.

27. **Halla** los vértices, los focos y las asíntotas de estas hipérbolas:

a. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

b. $9x^2 - 4y^2 = 36$

c. $x^2 - y^2 + 4 = 0$

d. $x^2 - y^2 - 8 = 0$

28. **Halla** el centro, los focos y los vértices de las siguientes hipérbolas:

a. $\frac{(x - 4)^2}{16} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$

b. $\frac{(x - 1)^2}{5} - \frac{4(y - 2)^2}{5} = 1$

29. La ecuación que describe la siguiente gráfica es:

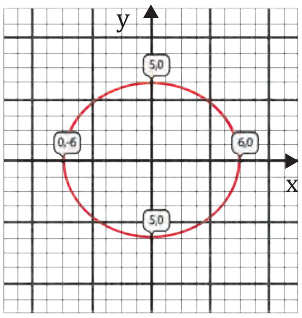


Fig. 46.

a. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{5} = 1$

b. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

c. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

d. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$

30. **Halla** la ecuación de las hipérbolas determinadas por las siguientes condiciones:

a. Focos: $(\pm 5, 0)$. Vértices $(\pm 3, 0)$

b. Focos: $(0, \pm 10)$. Vértices $(0, \pm 8)$

c. Vértices: $(\pm 1, 0)$. Asíntotas $y = \pm 5x$

d. Focos: $(0, \pm 6)$. Pasa por $P = (-5, 9)$

e. Focos: $(0, \pm 1)$. Longitu eje real: 1.

f. Asíntotas: $y = \pm \frac{x}{2}$. Pasa por el punto de coordenadas: $(5, 2)$

5 Más a fondo

31. **Identifica** las siguientes cónicas y **halla** sus elementos característicos:

a. $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b. $8x^2 - 3y^2 = 120$

c. $x^2 + 4y^2 = 100$

d. $y^2 = 36x$

32. **Halla** la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano con diferencia de distancias a los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (0, -1)$ igual a 1. ¿De qué tipo de curva se trata?

Para finalizar

1. Sea la siguiente gráfica:

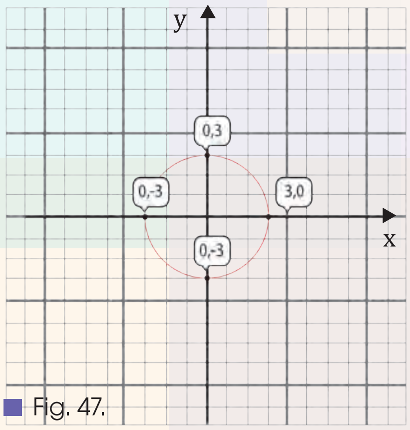


Fig. 47.

a. ¿Cuáles son los elementos que definen de forma total a una circunferencia?

b. ¿Cuál es el valor del radio?

c. **Escribe** la ecuación respectiva

d. ¿Cómo varía la ecuación de la circunferencia si el centro se traslada 4 unidades a la derecha?

e. ¿Cómo se explicaría el hecho de que al recorrer 4 unidades a la derecha, que significaría un aumento de cuatro unidades (+4), en la ecuación aparezca (-4)?

f. En cambio ¿Cómo varía la ecuación de la circunferencia si el centro se traslada tres unidades hacia arriba?

2. Sea la gráfica:

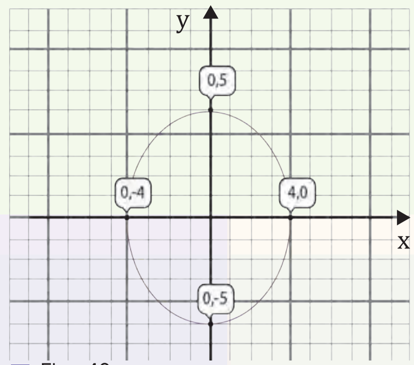


Fig. 48.

a. ¿Cuál es la distancia del eje mayor?

b. ¿Cuál es la distancia del eje menor?

c. ¿Cuál es la ecuación de la gráfica?

d. ¿Cómo cambiaría la ecuación si el eje mayor se trasladase al eje horizontal y el eje menor al eje vertical?

e. En una elipse, ¿Cuál de las variables entre a, b y c, es mayor?

f. Según la gráfica, ¿cuál sería la ecuación si la elipse se traslada 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo?

g. ¿Cómo diferenciamos si una elipse es paralela al eje x o paralela al eje y?

3. ¿Cómo se diferencian las ecuaciones canónicas de la elipse e hipérbola?

4. Para la expresión $x^2 = -20y$ el lado recto y la directriz es:

a. $LR = 10, y = 5$

b. $LR = 5, y = -4$

c. $LR = 20, y = 5$

d. $LR = -20, y = -4$

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

DESARROLLOS TECNOLÓGICOS

Antenas parabólicas

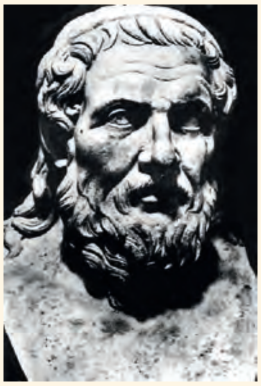

http://goo.gl/zjZins

Las antenas parabólicas se caracterizan por incorporar un reflector parabólico cuya superficie es un paraboloide (superficie tridimensional resultante de girar una parábola en torno a su eje de simetría). Tienen la propiedad de reflejar los rayos paralelos entrantes hacia su foco, donde suele ubicarse un receptor de señales. Se utilizan para conectar con satélites, comunicarse con radioaficionados o recoger señales de muy alta frecuencia.

En grupos, **realicen** una presentación con fotografías de elementos del entorno donde se identifiquen superficies cónicas o derivadas de ellas.

SOCIEDAD

El gran geómetra


https://goo.gl/Cv7wfn

Así era conocido el matemático griego Apolonio de Perge (262 a. C.-190 a. C.), famoso por ser quien otorgó el nombre de elipse, parábola e hipérbola a las figuras que hoy conocemos.

Recopiló todos sus estudios en su famosa obra, *sobre las secciones cónicas* en la que, además, trataba las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas.

SOCIEDAD

La papiroflexia y las cónicas

La papiroflexia es el arte, de origen japonés, que consiste en el plegado de papel para obtener diversas figuras. Además de las técnicas conocidas con finalidades lúdicas (aviones, barcos, pajaritas, etc.), doblar un papel puede ayudar a conseguir elementos geométricos relacionados con las cónicas.

–**Observa** cómo obtener una elipse a partir de una circunferencia: http://links.edebe.com/puv8db

–**Busca** información para obtener, con una técnica parecida, otras cónicas.

SENTIDO CRÍTICO

Óvalos, ovoides y elipses

Estas tres figuras pueden llevar a comparaciones un tanto complejas y confusas;
mientras la elipse es una curva cónica, el óvalo y el ovoide no lo son.

—**Busca** en Internet una definición correcta de óvalo y de ovoide. ¿Con qué otra cónica se les puede relacionar?

Accede al enlace http://links.edebe.com/tvea y **observa** los distintos métodos para obtener óvalos y ovoides.

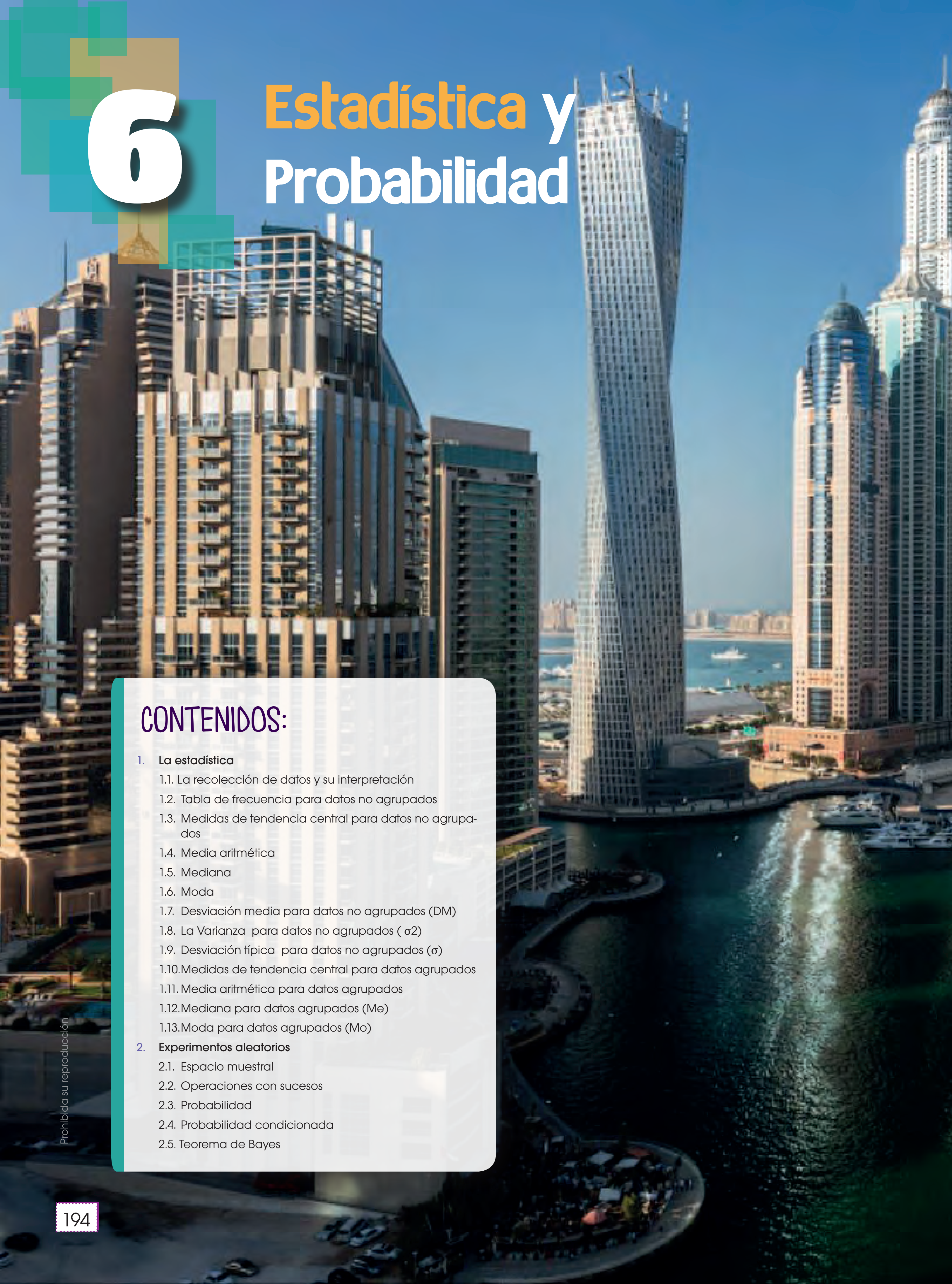
—¿En qué coinciden y en qué se diferencian estas dos líneas curvas?

SI YO FUERA....

Arquitecto


http://goo.gl/7bYmAj

Aplicaría conocimientos sobre lugares geométricos, partiendo desde el diseño como una cenefa, utilizando paquetes informáticos, para luego plasmarlos en cubiertas parabólicas en diversas instalaciones , investigando materiales que tengan características flexibles, como algún tipo de madera.



6 Estadística y Probabilidad

CONTENIDOS:



Noticias

Baja el precio del suelo urbano un 11,5 % y las ventas, un 22 %

En el primer trimestre del año 2013, las ventas de pisos bajaron un 22 %, y el precio del metro cuadrado bajó un 11,5 % en comparación con el año anterior. En las poblaciones más habitadas el precio del metro cuadrado ha disminuido un poco más, llegando al 20 %.

El País, 18-6-2013.

Web

En la siguiente web puedes encontrar todo tipo de datos y encuestas. También hay juegos y un poco de historia, que te ayudarán con la estadística:

http://www.ine.es/explica/explica.htm

Esta otra página te servirá como apoyo durante estos temas. En ella podrás repasar la teoría y dispondrás de una evaluación al final:

http://links.edebe.com/zkbk

Películas

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947).

Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

EN CONTEXTO

Observa el gráfico que encontrarás en el siguiente enlace y **contesta** razonadamente a las preguntas:
http://links.edebe.com/ixn

a. ¿Puedes describir la trayectoria del gráfico?

b. ¿Podrías predecir lo que va próximos cuatrimestres? a ocurrir en los

c. ¿Te podrías fiar de esta predicción?

Busca otros gráficos e intenta predecir lo que va a suceder. ¿Qué ocurre en la realidad?

1. LA ESTADÍSTICA



La estadística, es una ciencia que estudia el proceso de análisis de un fenómeno, recolectando información para luego ordenarla, presentarla y analizarla, con la finalidad de describir, comparar y explicar sus características.

Población y muestra

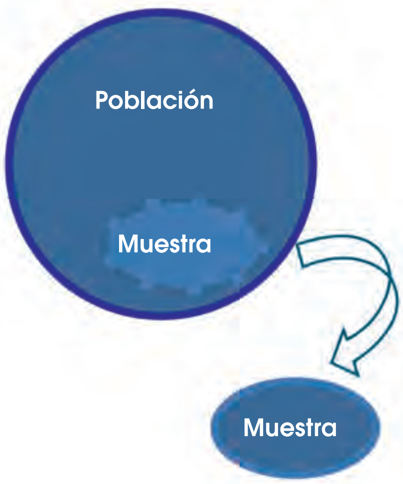


Fig. 1.

Población es un conjunto finito de elementos o personas que presentan características comunes, objetivos del estudio a determinarse, así por ejemplo tenemos:

- Empleados de la empresa de alimentos «Alimentar».
- Lámparas de iluminación del hotel «Buenaventura».
- Estudiantes de la Unidad Educativa «Nuevo amanecer».

El tamaño de la población se determina por el número de elementos o individuos que se pretende estudiar, por ello es uno de los factores más importantes a la hora de realizar cierto tipo de estudio. Cuando el tamaño de la población es muy extenso, surge la necesidad de estudiar únicamente una parte de la misma, con la finalidad de reducir esfuerzos, tiempo y recursos económicos.

Muestra es un subconjunto de la población; el número de elementos considerados debe ser representativo y conservar las mismas características, relacionando los ejemplos citados en la población tendremos respectivamente:

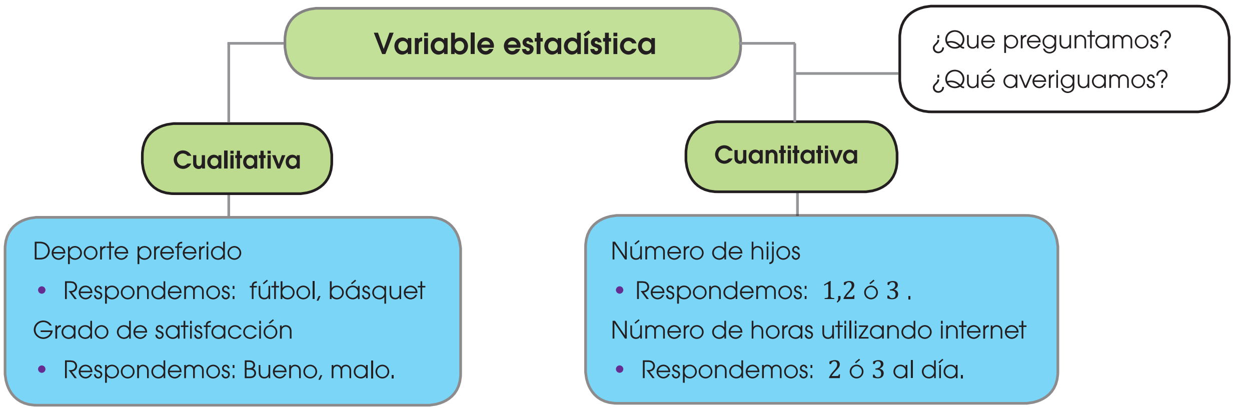
- 120 empleados entre los departamentos de ventas, producción y planificación.
- 25 Lámparas de iluminación entre los pisos 1, 3, 5 así como del *lobby*.
- 200 estudiantes entre el ciclo básico, básico superior y bachillerato.

Las variables y sus tipos

Variables estadísticas: Son las propiedades o características que se desea evaluar.

Variables cualitativas: Se miden mediante cualidades de tipo nominal u ordinal, no toman valores numéricos; usualmente respondemos a preguntas mediante palabras.

Variables cuantitativas: Son de carácter exclusivamente numérico, pueden ser discretas o continuas. Usualmente respondemos a preguntas o averiguaciones mediante un valor numérico.



Las variables cualitativas pueden ser nominales u ordinales; en la primera, los valores no siguen una tendencia de orden determinado, por ejemplo tenemos: el estado civil de una persona, el género de un individuo, lugar de nacimiento...

En cambio, en las variables cualitativas ordinales se asignan valores que siguen una tendencia de orden, por ejemplo: Ninguna, algunas veces, muchas veces, siempre.

1.1. La recolección de datos y su interpretación

El instrumento más utilizado para recolectar información sobre cierto tipo de estudio es la encuesta; luego de realizada, se organiza en tablas, con la finalidad de realizar el tratamiento de la misma. Entre algunos conceptos integrantes, que figuran en las tablas tenemos:

Frecuencia absoluta: Es el número de veces en que se repite o aparece un valor, el total del número de veces, deberá coincidir con el tamaño de la muestra.

Frecuencia relativa: Es el cociente entre los valores de frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. Toma valores entre 0 y la unidad, debido a que son fracciones.

El valor total de todas las frecuencias relativas es 1.

De la frecuencia relativa se deriva su interpretación porcentual, donde se halla el producto entre la frecuencia relativa por 100%.

Actividades

1. En la situación: Se realiza un estudio para determinar el grado de satisfacción del nivel educativo en el Colegio «ABC», que encuestó a 100 estudiantes de los cursos de bachillerato.

   Identifica la población, muestra, variable y tipo de variable.

2. **Clasifica** las siguientes variables en cualitativas o cuantitativas: Edad, ocupación, nacionalidad, remuneración económica, hijos, signo zodiacal, comida preferida.

3. **Escribe** tres ejemplos de variables cualitativas nominales y ordinales.

4. **Describe** tres ejemplos de variables cuantitativa.

1.2. Tabla de frecuencia para datos no agrupados

Los datos no agrupados son valores obtenidos y recolectados a través de una encuesta, en una cantidad pequeña relativamente $(n < 30)$, mismos que son analizados sin tipo de preclasificación.

Ejemplo 1

Se realiza un estudio para determinar la edad de veinte estudiantes del décimo año de EGB del Colegio «ABC», y se obtuvo los siguientes datos:

14, 15, 14, 14, 13, 16, 16, 15, 15, 15 , 15, 15, 14, 14, 14, 14, 15, 16, 16, y 14.

Determinemos la tabla de frecuencias considerando la variable mencionada.

1. Se registran los valores ubicando el menor como primer dato, seguido del resto de valores hasta el mayor, una sola vez, en forma vertical.
2. Se contabiliza el número de datos registrados en los datos estadísticos.

   Observación: El total de f_i, debe coincidir con el total de la muestra.
3. Se establece la frecuencia absoluta acumulada, sumando en forma transversal, conservando el primer valor.

   Observación: El último valor de fa_i, coincide con total de la muestra.
4. Se establece la frecuencia relativa, mediante fracciones donde el numerador es la frecuencia absoluta respectiva y el denominador, el total de la muestra $(\Sigma \text{ fi })$.

   Observación: Establecemos el valor decimal utilizando dos decimales.
5. Se establece la frecuencia relativa porcentual, multiplicando los valores respectivos de la frecuencia por 100%.
6. Se establece la frecuencia relativa acumulada, sumando en forma transversal, conservando el primer valor.

Observación: El último valor de fa_r, coincide con el total de la unidad si se considera el valor decimal o con el 100 % si se toma en cuenta los valores de fr_p.

xi	fi	fai	fr	frp(%)	far
13	1	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	5	5
14	8	9	$\frac{8}{20} = 0,40$	40	45
15	7	16	$\frac{7}{20} = 0,35$	35	80
16	4	20	$\frac{4}{20} = 0,20$	20	100
	$\sum fi = 20$		$\sum fi = 1$	$\sum fi = 100\%$	

Tabla 1.

Simbología de la tabla:

xi: Dato estadístico
fi: Frecuencia absoluta
fai: Frecuencia absoluta acumulada
fr: Frecuencia relativa
frp: Frecuencia relativa porcentual
far: Frecuencia relativa acumulada

1.3. Medidas de tendencia central para datos no agrupados

Son medidas estadísticas cuyo cálculo muestra la relación entre un valor determinado y un conjunto de valores. Constituyen un punto central de referencia, en torno al cual los demás valores le circundan. Así tenemos: la media aritmética, mediana y moda.

1.4. Media aritmética

Es el parámetro estadístico, más utilizado en un sinnúmero de estudios.

Sea un determinado número de datos estadísticos: a_1, a_2, a_3,.......a_n, la media aritmética se obtiene sumando todos los datos obtenidos y dividiendo para el número de datos.

Debido al proceso descrito, se la conoce también como promedio.

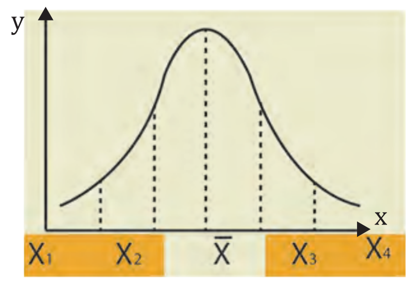


Fig. 2.

Ejemplo 2

José obtiene en sus evaluaciones quimestrales, en las diferentes asignaturas: 6,87 , 8,50 , 9,25 , 8,15 , 9,00 , 6,45 y 8,25 . Determinar la media aritmética.

Solución:

$$\bar{x} = \frac{6{,}87 + 8{,}50 + 9{,}25 + 8{,}15 + 9{,}00 + 6{,}45 + 8{,}25}{7} = \frac{56{,}47}{7} \approx 8{,}07$$

José obtiene una media aritmética de 8,07 en sus evaluaciones.

Media aritmética ponderada

La frecuencia ponderada relaciona datos estadísticos así como su respectiva periodicidad; se determina mediante el cociente entre la suma del producto de datos y entre los datos y frecuencias y el total de la muestra considerada en el estudio.

Y TAMBIÉN: ¿?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum f_i}$$

Simbología

x_i: Dato estadísitico

f_i: Frecuencia absoluta

$\sum f_i$: Total de la muestra

Ejemplo 3

20 estudiantes obtienen en el primer parcial, las siguientes calificaciones: 7, 8, 7, 6, 8, 6, 8, 9, 8, 9, 9 , 8 , 6, 7 , 9, 7, 6 , 8 , 9 y 8.Calculemos la media ponderada.

xi	fi	xifi
6	4	24
7	4	28
8	7	56
9	5	45

$\sum f_i = 20$ $\sum x_i f_i = 153$

Tabla 2.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{153}{20} = 7{,}65$$

La media aritmética de los 20 estudiantes en el primer parcial es de 7,65.

1.5. Mediana (Me)

La mediana es el parámetro estadístico que ocupa la posición central de los datos estadísticos, dividiendo la serie de datos en dos partes iguales.

Para obtener la mediana se debe ordenar los datos estadísticos de manera ascendente (de menor a mayor); se presentan dos casos:

Caso 1: Cuando el número de datos es par, la mediana se obtiene calculando el promedio de los valores centrales.

Ejemplo 4

Hallemos la mediana, sean los valores: 8, 6, 7, 5, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 7, 8, 10, 12, 7, 8, 9, 6 y 7.

Solución: Se observan veinte valores, los ordenamos y utilizamos los valores centrales.

Ordenando: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 12

Entonces, la mediana se obtendrá: $\text{Me} = \frac{7+7}{2}$; $\text{Me} = \frac{14}{2}$; $\text{Me} = 7$

Caso 2: Cuando el número de datos es impar, la mediana se ubica en el valor central de los datos estadísticos.

Ejemplo 5

Determinemos la mediana entre: 25, 45, 35, 67, 34, 56, 54, 34 y 28

Solución: Se observan nueve valores; los ordenamos e identificamos el valor central.

Ordenando: 25, 28, 34, 34, 35, 45, 54, 56, 67

Entonces la mediana es 35.

Actividades

5. Las ventas registradas en dólares, para los meses del año anterior fueron: 300, 250, 450, 230, 235, 125, 450, 750, 800, 230, 650, 1800. **Determina** la media aritmética y la mediana de los datos registrados.

6. En determinado estudio, se observa el tiempo que registra un deportista de alto rendimiento en sus entrenamientos: 3,20; 3,40; 3,52; 3,48; 3,67; 3,15; 3,96; 3,75 y último 3,45. **Halla** los valores de la media aritmética y mediana para el rendimiento del deportista.

7. **Halla** la moda, la media aritmética y la mediana de esta serie de datos.

   9,75; 9,50; 9,50; 9,25; 9,50; 9,75

   - **Determina** los diferentes parámetros de dispersión (recorrido, desviación media, varianza y desviación típica) de la serie.

8. Se realiza un estudio para determinar el acercamiento a la lectura de 21 estudiantes en un colegio, se pregunta el número de libros leídos en el último mes, los datos registrados son: 3, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1. **Determina** la tabla de frecuencias, la media aritmética, la media aritmética ponderada y la mediana de los datos registrados.

9. Una máquina produce piezas que, teóricamente, han de medir 50 mm. Seleccionada una muestra de 39 piezas, se obtuvieron las siguientes medidas, expresadas en milímetros.

   49, 49, 50, 52, 50, 50, 49, 50, 52, 51, 50, 47, 50,

   51, 49, 50, 50, 51, 49, 52, 50, 51, 50, 51, 50 ,50,

   51, 50, 48, 50, 53, 50, 52, 49, 50, 53, 49, 48, 55

   Calcula la moda, la media y la mediana de esta muestra.

10. Se desea llevar a cabo un estudio estadístico de la edad de los visitantes de un museo. Para ello, se considera una muestra representativa y se obtienen estos resultados.

    13, 15, 18, 22, 21, 35, 38, 45, 20, 21, 19, 24, 28,

    67, 26, 24, 31, 23, 25, 27, 25, 16, 17, 19, 20, 21

    Determina la media aritmética y la mediana.

1.6. Moda (Mo)

La moda es una medida estadística que muestra el dato estadístico que más se repite en el estudio de una variable, por ende, la moda se establece también como el valor que tiene la mayor frecuencia absoluta. Puede haber más de una moda en el análisis de datos.

Ejemplo 6

Determinemos la moda entre los valores: 3, 5, 6, 7, 6, 9, 7, 8, 10, 9, 7, 8, 9, 6 y 7.

Solución: Tenemos quince valores, de los cuales se observa que: el valor 7 se repite cuatro veces, a diferencia del valor 6, que se repite 3 veces; por ello, se concluye que la moda de los datos estudiados es 7.

Ejemplo 7

Determine la moda de: 5, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 2, 5, 2, 3 y 4.

Solución: Según los datos, la moda será: 2 y 3. Por ende tenemos un estudio bimodal.

Ejemplo 8

Se encuesta a 25 estudiantes sobre el deporte preferido, se propusieron las opciones: futbol (F), voleibol (V), tenis (T), básquet (B). Las respuestas fueron:
F, V, T, T, F, F, B, F, B, V, T, T, V, V, F, F, V, F, V, T, B, T, V, B y F.
Analizamos una variable cuantitativa, cuyos valores y frecuencia son respectivamente:

X_i	f_i
Futbol (F)	8
Voleibol(v)	7
Tenis (T)	6
Básquet (B)	4

Tabla 3.

En el cuadro se observa que la mayor frecuencia absoluta es ocho y corresponde a fútbol, por ende la moda del conjunto de datos es fútbol.

Actividades

11. Los valores de durabilidad de las pilas AAA, en un determinado juguete son: 32, 33, 31, 32, 29, 30, 31, 32, 30, 32, 34, 33, 31, 32, 29, 33, 31, 32, 34, 29, 31, 30, 30, 32, 29, 32, 32, 32, 34, 30, 29, 30, 32, 32, 31, 32, 31.

    Determina la media aritmética, la mediana y moda.

12. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana y moda de:

    6, 5, 4, 3, 4, 3, 6, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 6.

13. Según los datos de la tabla:

X_i	f_i
8	23
9	13
10	19
11	23

Tabla 4.

Determina la media aritmética ponderada, la mediana y moda de los datos registrados.

Y TAMBIÉN: ¿?

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Simbología:

DM: Desviación media
X_i: Valor estadístico
n: Número de datos

1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)

Se denota como DM a la media aritmética de los valores absolutos de la diferencia entre un valor determinado y la media aritmética del respectivo conjunto de datos estadísticos. Relaciona las desviaciones de valores con respecto a la media aritmética.

Ejemplo 9

Los valores: 8, 6, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 8 y 9 constituyen la edad de un grupo de niños que participan en un curso vacacional. Determinemos la desviación media.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{8+6+7+7+9+6+6+7+8+9}{10} = \frac{73}{10} \approx 7{,}30$$

Segundo: Calculamos la desviación media (DM).

$$DM = \frac{|8-7{,}30| + |6-7{,}30| + |7-7{,}30| + |7-7{,}30| + |9-7{,}30| + |6-7{,}30| + |6-7{,}30| + |7-7{,}30| + |8-7{,}30| + |9-7{,}30|}{10}$$

$$DM = \frac{|0{,}70| + |1{,}30| + |0{,}30| + |0{,}30| + |1{,}70| + |1{,}30| + |1{,}30| + |0{,}30| + |0{,}70| + |1{,}70|}{10}$$

$$DM = \frac{9{,}60}{10} \;;\; DM = 0{,}96$$

Actividades

14. Sean los valores : 4, 5, 6, 7, 8, 5, 6, 5, 8, 4, 5 y 8. **Determina:**

a. La media aritmética

b. La mediana

c. La moda

d. La desviación media

15. **Determina** la desviación media de una distribución dada por los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

16. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda y desviación media de: 26, 25, 24, 27, 28, 2, 26, 27, 26, 25 y 26.

17. Según los datos de la tabla, **determina** lo siguiente:

X_i	f_i
2	2
3	7
5	8
7	13
8	12

Tabla 5.

a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?

b. **Determina** la media aritmética.

c. **Determina** la mediana.

d. **Determina** la moda.

e. **Determina** la desviación media.

1.8. La Varianza para datos no agrupados (σ^2)

Es una medida de dispersión, definida como la diferencia entre el cociente del cuadrado de cada uno de los datos estadísticos y el número de datos menos el cuadrado de la media aritmética.

Y TAMBIÉN: ¿?

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Simbología:
σ^2: Varianza
Xi: Valor estadístico
$\bar{x}$: Media aritmética

Ejemplo 10

Hallar la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.
Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{7+9+7+7+9+6+6+7+6+8}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{72}{10}$$

$$\bar{x} = 7{,}20$$

Segundo: Calculamos la varianza.

$$\sigma^2 = \frac{7^2+9^2+7^2+7^2+9^2+6^2+6^2+7^2+6^2+8^2}{10} - 7{,}20^2$$

$$\sigma^2 = \frac{49+81+49+49+81+36+36+49+36+64}{10} - 7{,}20^2$$

$$\sigma^2 = \frac{4530}{10} - 51{,}84$$

$$\sigma^2 = 453 - 51{,}84$$

$$\sigma^2 = 401{,}16$$

Actividades

18. Sean los valores : 14, 16, 18, 19, 16, 18, 18, 17, 15, 16, 14 y 18.

    Determina:

    a. La varianza
    b. La media aritmética
    c. La mediana
    d. La desviación media.

19. **Determina** la varianza de los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

20. **Determina** los valores de la media aritmética y la varianza de los siguientes datos:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	12	8	7	6	5	3	3	2	12

Tabla 6.

21. Según los datos en las tablas, **determina**:

X_i	f_i
13	3
14	4
16	6
18	6
20	8
22	15

Tabla 7.

X_i	f_i
2	4
3	5
5	7
6	15
7	17
8	18

Tabla 8.

a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
b. **Determina** la media aritmética.
c. **Determina** la mediana.
d. **Determina** la desviación media.
e. **Determina** la varianza.

1.9. Desviación típica para datos no agrupados (σ)

Conocida como desviación estándar, tiene amplia relación con la varianza, debido a que para obtener la desviación típica se calcula la raíz cuadrada de la varianza. Se denota σ.

Y TAMBIÉN: ¿?

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Simbología:

σ: Desviación típica
x_i: Dto estadístico
$\bar{x}$: Media aritmética

Ejemplo 11

Hallemos la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.
Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 16 + 14}{5} = \frac{69}{5} = 13{,}8$$

Segundo: Calculamos la desviación típica o estándar.

$$\sigma = \sqrt{\frac{12^2 + 13^2 + 14^2 + 16^2 + 14^2}{5} - 13{,}8^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{144 + 169 + 196 + 256 + 196}{5} - 190{,}44}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{961}{5} - 190{,}44}$$

$$\sigma = \sqrt{1{,}8}$$

$$\sigma = 1{,}34$$

Actividades

22. Sean los valores: 245, 250, 252, 253, 251, 250, 250, 247, 249 y 253.

    Determina:

    a. La varianza
    b. La media aritmética
    c. La mediana
    d. La desviación media.
    e. La desviación típica.

23. **Halla** la varianza y la desviación típica de los siguientes valores: 27, 28, 28, 29, 25, 25, 26, 27, 29, 25, 29, 26, 24 y 28.

24. **Determina** los valores de la desviación típica y la varianza de los siguientes datos:

x_i	12	14	16	20	25	27	29	30
f_i	11	32	20	17	15	9	8	12

Tabla 9.

25. Según los datos en las tablas, **determina**:

x_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
f_i	7	8	8	7	5	2

Tabla 10.

x_i	5,34	6,34	5,97	6,03	5,99	6,05
f_i	23	32	29	28	27	30

Tabla 11.

x_i	2	2,7	2,9	2,9	2,6	2,4
f_i	2	8	7	5	9	5

Tabla 12.

a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
b. **Determina** la media aritmética
c. **Determina** la desciación estándar
d. **Determina** la desviación media
e. **Determina** la varianza

Tabla de frecuencia para datos agrupados

Los datos agrupados al igual que los no agrupados son recolectados a través de una encuesta, la principal característica es que conforman grupos (intervalos), para ello previamente se determina el valor del rango y posteriormente el número de intervalos según la disposición de datos.

Y TAMBIÉN: ¿?

Los intervalos hallan plena aplicación cuando los datos estadísticos tienen una diferencia considerable.

Rango de datos

En un listado de datos estadísticos, el rango se determina mediante la diferencia entre el valor mayor (xmáx) y el valor menor (xmin).

Rango = xmáx - xmin

Ejemplo: En los datos: 34, 37, 35, 33, 33, 38, 39, 38, 37, 39 , 39, 38, determinar el valor del rango .

Solución: 34, 37, 35, 33, 33, 38, 39, 38, 37, 39 , 39, 38.

Rango = xmáx – xmin; Rango = 39 – 33; Rango = 6

Disposición de intervalos

Los intervalos se conforman de acuerdo al valor obtenido en el rango, debido a que el número que se obtiene se dispone según sus factores. En el ejemplo anterior, el rango resultó 6, sus respectivos factores son entre otros: 1, 2, 3, 6, donde seleccionamos dos números de manera que el primero represente el número de intervalos y el segundo, la manera de disponerse. Para el ejemplo de rango = 6, es posible conformar dos intervalos de tres o también tres intervalos de dos.

Observación: En el caso de que el rango resulte un número primo, se procede a aumentar una unidad a la cantidad mayor, y de igual forma, restar una unidad a la cantidad menor, hasta lograr en la diferencia un número divisible.

Ejemplo: En los datos : 59, 57, 68, 69, 86, 75, 89, 88, 87, 89 , 90, 94, determinemos el valor del rango y el número de intervalos a conformar en la tabla de frecuencias.

Rango = xmáx – xmin; Rango = 94 – 57; Rango = 37

Aumentando y disminuyendo: Rango = Xmáx – Xmin; Rango = 95 – 56; Rango = 39

Entonces, al observar los factores de 39, podemos concluir que es posible formar trece intervalos de tres o, en su defecto, tres intervalos de trece.

Marca de clase (x_i)

Es valor medio de cada clase y se obtiene mediante el promedio del valor mínimo del intervalo y el valor mayor del intervalo.

Ejemplo 12

En los datos: 12; 50; 13; 25; 18; 25; 17; 50; 21; 25; 22; 50; 23; 25; 25; 25; 28; 50; 27; 75; 28; 00; 29; 25; 30; 25; 32; 25; 34; 50; 35; 25; 37; 25; 37; 25; 38; 00; 27; 25; 28; 50; 26; 25; 32; 50; 35; 25; 36; 40; 34; 50; 35; 25; 38; 00; 39; 65; 40; 25; 42; 25; 30; 75; 25; 75; 25; 50; 26; 25; determinemos el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

Solución:

Rango = xmáx − xmin; Rango = 42,50 − 12,5; Rango = 30

Entonces se pueden formar los intervalos según las opciones:

- Cinco intervalos que comprendan seis unidades.
- Seis intervalos que comprendan cinco unidades.
- Diez intervalos que comprendan tres unidades.
- Tres intervalos que comprendan diez unidades.

Para el ejemplo, escogeremos cinco intervalos que comprendan seis unidades, así tendremos la siguiente tabla de frecuencias para intervalos:

Luego de determinar los intervalos, calculamos la marca de clase.

Realizamos el conteo de los 35 valores que se encuentren dentro del intervalo para determinar la frecuencia.

Se verifica que el total de la frecuencia absoluta coincide con el número de datos de la muestra.

Intervalos	X_i	f_i
[12,5 – 18,5[	15,5	4
[18,5 – 24,5[	21,5	3
[24,5 – 30,5[	27,5	12
[30,5 – 36,5[	33,5	8
[36,5 – 42,5[	39,5	8

Tabla 13. $\sum f_i = 35$

Actividades

26. En los datos: 12, 50, 38, 26, 55, 18, 27, 13, 25, 18, 25, 17, 50, 28, 50, 27, 75, 28, 29, 25, 67, 34, 30, 25, 32, 25, 34, 50, 35, 25, 37, 25, 37, 25, 28, 50, 26, 25, 32, 50, 35, 25, 36, 50, 55, 35, 37, 45, 54, 36, 34, 50, 35, 25, 38, 42, 25, 30, 25, 58, 25, 50, 26, 25; **determina** el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

27. **Considera** las estaturas de 28 alumnos expresadas en centímetros.

    154 158 162 148 163 153 159 180 165 168

    156 148 162 157 153 158 147 165 166 175

    172 167 160 155 147 156 161 159

    Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

28. Al lanzar un dado cuarenta y dos veces, obtenemos los siguientes resultados.

    3, 2, 1, 6, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 6, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 1, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 1, 5, 6, 5, 6, 2, 4, 1, 6, 5, 1, 2, 6

    Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

29. Las masas en gramos de treinta y tres piezas producidas por una máquina son:

    6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7; 6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7; 6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8

    Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

1.10. Medidas de tendencia central para datos agrupados

Los datos agrupados se caracterizan por aplicarse para una cantidad de datos estadísticos mayor que 20, los mismos que son agrupados en intervalos para analizarlos de manera más simple, resumiendo la información. Al igual que en los datos no agrupados, también se dispone de la media aritmética, mediana y moda, cuyos cálculos difieren de los datos no agrupados.

1.11. Media aritmética para datos agrupados

Es el parámetro estadístico más representativo de un determinado grupo de datos. Se obtiene mediante el cociente entre el producto de la marca de clase (xi) y la frecuencia absoluta (fi); para el cálculo se utiliza la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+ \ldots\ldots x_n f_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_if_i}{n}$$

Ejemplo 13

En una institución educativa se realiza un estudio, en el cual se analiza las estaturas medidas en centímetros de treinta estudiantes, los resultados fueron: 167, 158, 167, 165, 167, 170, 158, 168, 167, 160, 159, 162, 154, 155, 158, 168, 157, 169, 166, 168, 173, 162, 165, 170, 159, 162, 158, 170, 150, 155. Considerando los datos, determinemos el valor de la media aritmética para datos agrupados.

Solución:

Determinamos el rango: Rango = xmáx – xmin; Rango = 170 – 150; Rango = 20.
Pero se debe considerar que el valor 170 no debe incluirse como extremo superior de un intervalo entonces: aumentando y disminuyendo: Rango = 171 – 149; Rango = 22.
Se establecerían dos intervalos de once o también once de dos unidades, por conveniencia de análisis generamos otra clase de intervalos, entonces: Rango = 172 – 148; Rango = 24.
Establecemos los intervalos: Realizaremos cuatro intervalos de seis unidades.
Formamos la tabla de frecuencias para datos agrupados:

En el conteo tenemos:
167,158,167,165,167,170,158,168,167,160,159,162,154,155,158,168,157,169,166,168,173,162,165,170,159,162,158,170, 150,155

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[148 – 154[	151	1	151
[154 – 160[	157	10	1570
[160 – 166[	163	5	815
[166 – 172[	169	14	2366
		$\sum f_i = 30$	$\sum x_if_i = 4902$

Tabla 14.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_if_i}{n} = \frac{4902}{30} \approx 163{,}40$$

El valor de $\bar{x}$ es de 163,40

1.12. Mediana para datos agrupados (Me)

Se la conoce como clase de mediana, es una medida estadística que al igual que en los datos no agrupados, divide el conjunto de datos estadísticos en la mitad, generando un punto medio de referencia, se calcula mediante:

$$Me = Lim_{inf} + \frac{\frac{n}{2} - f aiant}{f_i} \cdot a$$

Simbología:

Me = mediana.

Lim_{inf} = límite inferior del intervalo de la mediana.

n = número de datos estadísticos.

$f$ainf = frecuencia absoluta acumulada en el intervalo anterior al de la mediana.

a = amplitud del intervalo.

Ejemplo 14

Los datos estadísticos que se obtuvieron en una encuesta fueron:
28 32 29 30 30 27 31 30 28 27
27 26 32 34 33 26 33 34 33 25
30 30 27 31 27 26 32 34 29 32
Determinemos el valor de la mediana para datos agrupados.

Solución:

Determinamos el rango: Rango = xmáx – xmin; Rango = 34 – 25; Rango = 9
El valor 34 no puede incluirse como valor superior del intervalo entonces es necesario aumentar y disminuir: Rango = 35 – 24; Rango = 11, resulta ser número primo entonces aumentamos y disminuimos: Rango = 36 – 23; Rango = 13, resulta ser número primo nuevamente entonces Rango = 37 – 22; Rango = 15.
Establecemos los intervalos: Realizaremos tres intervalos de cinco unidades.
Formamos la tabla de frecuencias para datos agrupados:

En el conteo tenemos:
28 32 29 30 30 27 31 30 28 27
27 26 32 34 33 26 33 34 33 25
30 30 27 31 27 26 32 34 29 32

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[22 – 27[	24,5	4	4
[27 – 32[	29,5	15	19
[32 – 37[	34,5	11	30

Tabla 15. $\sum f_i = 30$

Determinamos $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$ y ubicamos los valores superior e inferior a $\frac{n}{2}$ en fai; así tenemos $4 < \frac{n}{2} < 19$, además ubicamos el intervalo del valor superior: 27 – 32.

$$Me = Lim_{inf} + \frac{\frac{n}{2} - f\,aiant}{f\,i} \; ; Me = 27 + \frac{15 - 4}{15} \cdot 5$$

$$Me = 27 + \frac{55}{15} \; ; \; Me = 27 + \frac{11}{3} \; ; \; Me = \frac{92}{3}$$ Donde $Me = 30,67$

1.13. Moda para datos agrupados (Mo)

Para datos agrupados, es el dato estadístico que más se repite en el estudio de cierta variable, se calcula mediante:

$$Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$$

Simbología:

Mo = moda.

Lim_{inf} = límite inferior del intervalo de la moda.

Δf_1 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo anterior.

Δf_2 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo consecutivo.

a = amplitud del intervalo.

Ejemplo 15

La siguiente tabla de frecuencias resume en intervalos el número de artículos vendidos durante 43 días. Determinemos la moda para datos agrupados.

Intervalos	x_i	f_i	fai
[120 – 135[	127,5	5	7
[135 – 150[	142,5	9	16
[150 – 165[	157,5	3	28
[165 – 180[	172,5	2	43
		$\sum f_i = 19$	

Tabla 16.

Solución:

Frecuencia absoluta modal = 9

Frecuencia absoluta intervalo anterior = 5

Frecuencia absoluta intervalo siguiente = 3

Y además $a = 15$.

$\Delta f_1 = 9 - 5 = 4$

$\Delta f_2 = 9 - 3 = 6$

Reemplazamos en la expresión:

$Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$; $Mo = 135 + \frac{4}{10} \cdot 15$; $Mo = 135 + 6$; $Mo = 141$

Por lo tanto la moda es 141 artículos.

Actividades

30. Para la siguiente disposición de datos:

12 28 23 32 36 48 50 55 57 26

48 50 55 57 48 12 28 23 48 12

15 28 29 32 32 28 23 55 12 28

48 12 28 28 29 32 32 32 36 48

Determina el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase, la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

31. Según la tabla:

Intervalos	X_i	f_i
[130 – 150[	140	5
[150 – 170[	160	7
[170 – 190[	180	12
[190 – 210[	200	4
		$\sum f_i =$

Tabla 17.

Determina los valores de la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Existen múltiplos experimentos en que, por muchas veces que se repitan, no se puede saber de antemano su resultado. Son los experimentos aleatorios.

> Un experimento es aleatorio si no podemos predecir su resultado, a pesar de conocer las condiciones en las que se realiza.

Así, el experimento lanzar un dado sobre una mesa es aleatorio, pues no es posible predecir el resultado que vamos a obtener.

2.1. Espacio muestral

Para estudiar un experimento aleatorio, es importante conocer el conjunto de resultados posibles que pueden darse.

> El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de los posibles resultados que pueden darse, y se representa por la letra W.

En el experimento lanzar un dado y anotar la puntuación que sale, el espacio muestral lo forman las distintas puntuaciones que pueden darse, es decir: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Si un experimento consiste en la realización de varios experimentos, se llamará **experimento compuesto**; por ejemplo, lanzar dos veces un dado.

Sucesos

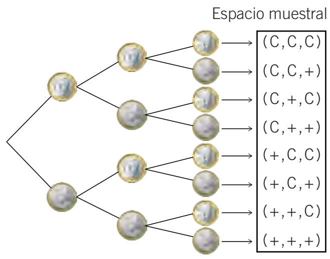
Si en lugar de considerar todo el espacio muestral, nos quedamos con un subconjunto de él, estaremos hablando de sucesos.

> Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Y TAMBIÉN: ¿?

Para trabajar con experimentos compuestos, es útil representar el espacio muestral en un diagrama de árbol o ayudarse con una tabla de doble entrada o de contingencia.

Por ejemplo, en el experimento del lanzamiento de tres monedas, el espacio muestral se podría plantear mediante un diagrama de árbol:



Y si estudiamos los efectos de un medicamento en distintos grupos de personas, plantearíamos una tabla de contingencia:

	Hombres	Mujeres
Efecto correcto	34	56
Efecto incorrecto	17	28
No hace efecto	75	23

Tabla 18.

Un experimento es determinista si, al realizarlo, sabemos el resultado que va a dar.

Tipos de sucesos

Se pueden distinguir los siguientes tipos de sucesos:

- **Suceso elemental**: suceso formado por un único elemento del espacio muestral.
- **Suceso compuesto**: suceso formado por dos o más elementos del espacio muestral.
- **Suceso seguro**: suceso que se verifica siempre. Es el suceso formado por todos los elementos del espacio muestral.
- **Suceso imposible**: suceso que no se verifica nunca.
- **Sucesos incompatibles**: dos sucesos son incompatibles si no tienen elementos en común.

2.2. Operaciones con sucesos

Al ser los sucesos subconjuntos del espacio muestral, podremos efectuar con ellos las operaciones propias de los conjuntos.

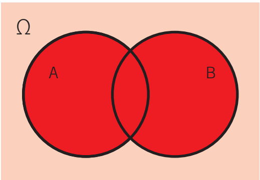
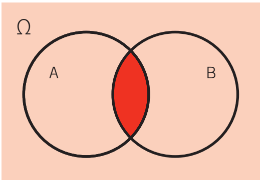
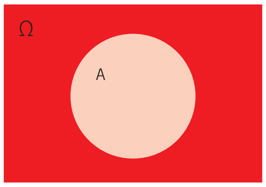
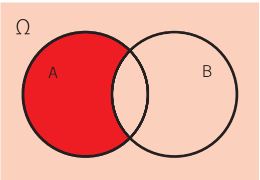
Unión	Intersección	Complementario	Diferencia
Se llama unión de los sucesos A y B $(A \cup B)$ al suceso formado por todos los resultados que están en A o en B.	Se llama intersección de los sucesos A y B $(A \cap B)$ al suceso cuyos elementos pertenecen a ambos sucesos a la vez, es decir, que están en A y en B.	Se llama complementario de $A(A = A'')$ al suceso cuyos elementos son resultado del experimento, pero no pertenecen al suceso A.	Se llama diferencia entre A y B $(A - B)$ al suceso cuyos elementos pertenecen a A, pero no a B.
			

Tabla 19.

Propiedades de las operaciones con sucesos

De las operaciones con sucesos se derivan las siguientes propiedades:

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Complementación	$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cup \overline{A} = \Omega$
Leyes de morgan	$(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$	$(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

Tabla 20.

Ejemplo 16

Lanzamos un dado y consideramos los sucesos: A, sacar par; B, sacar un impar distinto de 5; C, sacar un número mayor que 2. a. Expresemos los siguientes sucesos: B, $A \cup B$, $A \cap C$, $B - C$. b) Comprobemos que se cumplen las siguientes identidades: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \cup \overline{C} = \overline{B \cap C}$.

Comprensión: Primero identificamos el espacio muestral y los distintos sucesos. Después, resolvemos, paso a paso lo que pide el ejercicio.

Resolución: $\Omega = \{1,2, 3, 4,5,6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

a. $\overline{B} = \{2, 4,5,6\}$, $A \cup B = \{1,2, 3, 4,6\}$, $A \cap C = \{4,6\}$, $B - C = \{1\}$

b. Veamos que se cumple $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$:

Como $\overline{A} = \{1, 3,5\}$ y $\overline{B} = \{2, 4, 5, 6\}$, entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$.

Por otro lado, como $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ y $\overline{A \cup B} = \{5\}$, luego son iguales.

Para ver que se cumple $\overline{B} \cup \overline{C} = \overline{B \cap C}$, procedemos de la misma forma:

Como $\overline{B} = \{2, 4,5,6\}$ y $\overline{C} = \{1,2\}$, tenemos que $\overline{B} \cup \overline{C} = \{1,2, 4,5,6\}$.

Y $\overline{B} \cap \overline{C} = \{3\}$, luego $\overline{B \cap C} = \{1,2, 4,5,6\}$, por lo que se cumple la igualdad.

Demuestra las leyes de Morgan mediante la representación gráfica de conjuntos.

TIC

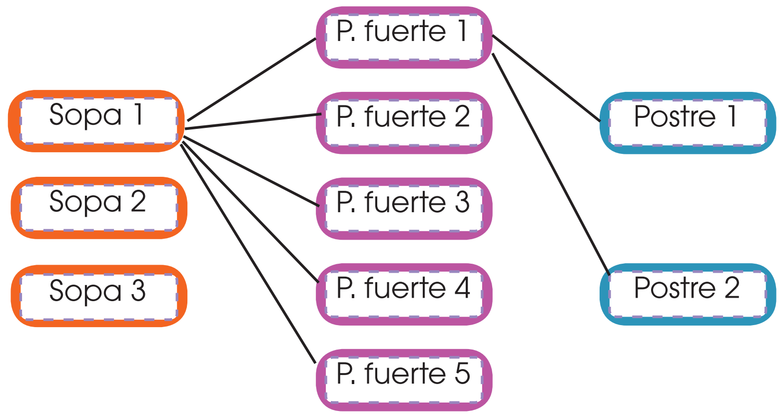
Además de las propiedades descritas en la tabla, existen otras denominadas idempotente, simplificativa e involución. Busca información acerca de estas propiedades y completa la tabla con ella.

2.3 Probabilidad

Introducción: Técnicas de Conteo

Ejemplo 17

Si en un restaurante, ofertan un menú que consta de: sopa, plato fuerte y postre; con tres variedades de sopa a escoger, cinco de platos fuertes y dos variedades de postre, las posibles formas en que una persona puede escoger un menú es:



Primera opción: sopa1, P. fuerte 1, postre 1
Segunda opción: sopa1, P. fuerte 1, postre 2
Tercera opción: sopa1, P. fuerte 2, postre 1
.... así sucesivamente. Ahora calculemos las opciones:

3 variedades de sopa x por 5 variedades de plato fuerte x 2 variedades de postre = 3 x 5 x 2 = 30 opciones de menú

Y TAMBIÉN: ¿?

Una aplicación muy común de los factoriales y de las técnicas de conteo es la que sirve para desarrollar el binomio de Newton:

$$(a+b)^n$$

Principio fundamental

Si un suceso puede ocurrir de n_1 formas distintas y si después de ocurrir este suceso, ocurre otro de n_2 formas, entonces ocurren ambos un número $n_1 \cdot n_2$.

En el ejemplo 17: $n_1 = 3$; $n_2 = 5$; $n_3 = 2$

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \text{ x } 5 \text{ x } 2 = 30$ opciones

A este principio se le conoce también como principio de multiplicación.

Y TAMBIÉN: ¿?

Por definición el factorial de cero siempre es igual a uno.

0! = 1

Factorial de n

Un factorial de n, se expresa como **n!** y esta definido de la siguiente manera:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1$$

Ejemplo 18

Calcular el siguente factorial:

$$7! = 7 \cdot (7\text{-}1) \cdot (7\text{-}2) \cdot (7\text{-}3) \dots 1$$
$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 5\ 040$$

Permutaciones

Ejemplo 19

Las permutaciones que se pueden hacer con las letras x, y, z, tomados de dos en dos son:

xy; yx; yz; zy; xz; zx

Como podemos observar obtuvimos seis formas

Se usa la notación ${}_3P_2 = 6$, para indicar las permutaciones de 3 objetos tomados de dos en dos.

Definición de permutación

De manera general, una elección ordenada de r objetos de entre n objetos, es una permutación.

Se denota por ${}_nP_r$ y se define así:

$${}_nP_r = n(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En el caso del ejemplo 19:

$${}_3P_2 = 3\,(3-1)\,(3-2)\ldots(3-2+1)$$

$$=3\,(2)\,(1)\,(1) = 6$$

Calculando la permutación de otra manera:

$${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{1} = 6$$

CALCULADORA

Las calculadoras científicas disponen de una función para determinar las permutaciones de la siguiente forma según el ejemplo 19:

presionamos el 3, a continuación shift luego la tecla (x), despues el número dos y finalizamos presinando la tecla igual, entonces saldrá:

$${}_3P_2 = 6$$

Este algoritmo puede variar según la calculadora científica que tengas.

Combinaciones

Ejemplo 20

Las combinaciones que se pueden hacer con las letras x, y, z, tomados de dos en dos son:

yx; yz; xz

Como podemos observar obtuvimos tres formas

Nota: xy es la misma combinación que yx, pero xy no es la misma permutación que yx

Se usa la notación ${}_3C_2 = 3$, para indicar las combinaciones de 3 objetos tomados de dos en dos.

Definición de combinación

De manera general, una selección de r objetos de entre n objetos (sin importar el orden de los objetos formados), es una combinación, denotada por ${}_nC_r$, otra notación es $\binom{n}{r}$

y se define así:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

en el caso del ejemplo 19:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ formas}$$

Definición de probabilidad

TIC

En el siguiente enlace, encontrarás una simulación de la ley de los grandes números aplicada a un dado:

Visita:

http://goo.gl/SSX0HH

¿Qué conclusiones puedes sacar de la observación de dicho experimento?

Para estudiar los sucesos en un experimento aleatorio y saber cuáles pueden darse más frecuentemente, utilizamos una medida denominada probabilidad.

Definición experimental: ley de los grandes números

Si realizamos el experimento consistente en extraer una bola de una urna donde hay 7 bolas azules y 3 blancas, ¿qué posibilidades hay de que la bola sea azul?

Un modo de dar respuesta a esta pregunta es llevar a cabo muchas veces este experimento. Así, podemos efectuar varias series de n realizaciones de él, y en cada una de ellas:

- Anotamos el número de veces que se han verificado los sucesos A azul y B blanca. Estos resultados n_a y n_b se llaman frecuencias absolutas de A y B.
- Calculamos la frecuencia relativa de A y B, f_a y f_b, es decir, el cociente entre las frecuencias absolutas y el número de realizaciones del experimento.

Observa un ejemplo de los resultados que podríamos haber obtenido al efectuar ocho series, donde en cada una se realizan cincuenta veces el experimento:

Suceso		Realizaciones del experimento							
		50	100	150	200	250	300	350	400
Azul	n_a	32	72	93	131	160	201	242	278
	f_a	0,640	0,720	0,620	0,655	0,662	0,688	0,692	0,695
Blanco	n_b	18	28	57	69	90	99	108	122
	f_b	0,36	0,28	0,380	0,354	0,338	0,312	0,309	0,305

Tabla 21.

Si observas las frecuencias relativas, estas tienden a situarse en torno a un cierto valor a medida que va aumentando el número de realizaciones del experimento.

Esta propiedad se observa, de forma más evidente, si representamos gráficamente las frecuencias relativas de cada suceso en función del número de extracciones.

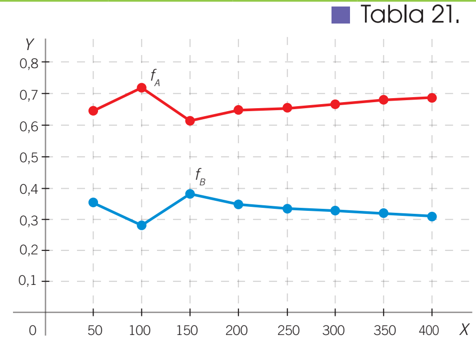


Fig. 3.

Esta propiedad permite dar una definición experimental de la probabilidad de un suceso:

Dado un suceso A asociado a un experimento aleatorio, llamamos probabilidad de A, $P(A)$, al número al que tiende a estabilizarse la frecuencia de A, al aumentar el número de realizaciones del experimento.

Esta definición de probabilidad basada en un número n muy grande de experimentos es la denominada ley de los grandes números.

Cálculo de probabilidades: regla de Laplace

En cualquier experimento aleatorio en el que los sucesos elementales son equiprobables, podemos aplicar la llamada regla de Laplace:

> La probabilidad del suceso A se obtiene dividiendo el número de resultados que forman el suceso A entre el número de resultados posibles:
>
> $$P(A) = \frac{\text{Casos favorables a } A}{\text{Casos posibles}}$$

Ejemplo 21

Si cogemos al azar una ficha de dominó, calculemos la probabilidad de estos sucesos:
a. Que la ficha sea un doble.
b. Que los puntos de la ficha sumen 10.

Comprensión: En ambos casos, se trata de un experimento equiprobable y deberemos determinar el número de casos favorables frente a los casos posibles.

Resolución: a. Número de casos favorables: 7 $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$.
Número de casos posibles: 28 fichas de dominó.

Luego: $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

b. Número de casos favorables: 3 $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$.
Número de casos posibles: 28 fichas de dominó.

Luego: $P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14} = 0{,}07$

Y TAMBIÉN: ¿?

Al representar experimentos compuestos mediante diagramas en árbol, cada rama tendrá asignada una probabilidad.
Así, para calcular la probabilidad de un suceso compuesto, deberemos tener en cuenta los siguientes aspectos:
1. La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de este camino.
2. La probabilidad de un suceso es la suma de cada uno de los caminos que conducen a la verificación de este suceso.

Ejemplo 22

Una bolsa contiene tres bolas rojas y dos azules. Extraemos sucesivamente y con reposición dos bolas, y observamos el color. ¿Cuál es la probabilidad del suceso S: «obtener una bola roja y una bola azul sin que importe el orden»?

Comprensión: Se trata de un experimento compuesto, por lo que nos ayudaremos de un diagrama en árbol. En cada rama, indicaremos la probabilidad del suceso correspondiente calculado a partir de la regla de Laplace.

Resolución: Denominamos a los sucesos R: «sacar bola roja» y A: «sacar bola azul». En la primera extracción, hay dos casos favorables a R y tres favorables a A, frente a los cinco casos totales. En la segunda extracción, las probabilidades son las mismas, pues las extracciones son con reposición. Ahora ya podemos dibujar el diagrama y señalaremos los caminos favorables al suceso S.
La probabilidad de cada camino es el producto de probabilidades:

$P(\{R,A\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ $P(\{A, R\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

Si sumamos las probabilidades de cada camino, obtenemos la probabilidad del suceso S:

$$P(S) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

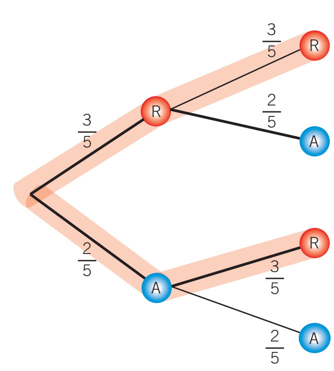


Fig. 4.

2.4. Probabilidad condicionada

Disponer de información previa sobre un suceso hace que varíe su probabilidad.

Así, si queremos calcular la probabilidad de un suceso A pero condicionado a otro suceso B, deberemos calcular la probabilidad de A condicionada a B.

Dados dos sucesos A y B tales que $P(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B a $P(A/B)$ al cociente: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, siendo $P(B) \neq 0$

De la relación anterior, se deduce una expresión que resulta muy útil en el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Ejemplo 23

Lanzamos un dado y nos dicen que la puntuación ha sido un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado haya sido el número 2?

Comprensión: Al tratarse de un experimento condicionado, deberemos calcular $P(A/B)$, siendo A el suceso «obtener un 2» y B el suceso «obtener un número par». Para ello, antes tendremos que aplicar la regla de Laplace para determinar $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

Resolución: El suceso $A \cap B = \{2\}$; por lo tanto, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

El suceso B es $B = \{2, 4, 6\}$, $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Luego: $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Comprobación: En este caso, podríamos haber calculado la probabilidad mentalmente, pues de los tres resultados favorables (número par) había un único resultado posible, el dos.

Ejemplo 24

Tenemos una urna con cinco bolas rojas y tres bolas negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra?

Comprensión: Consideramos los sucesos R_1: «la primera bola extraída es roja» y N_2: «la segunda bola extraída es negra». Nos preguntan $P(R_1 \cap N_2)$, que calculamos mediante $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2/R_1)$.

Resolución: $P(R_1) = \dfrac{5}{8}$ y la $P(N_2/R_1) = \dfrac{3}{7}$, pues al sacar una bola roja disponemos de una bola menos de este color, pero del mismo número de bolas negras.

Por lo tanto, $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2/R_1) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{56}$

La probabilidad de que la primera bola estraída sea roja y la segunda negra es $\dfrac{15}{56}$.

TIC

En el siguiente enlace podrás ver, paso a paso, un ejemplo de un problema de probabilidad condicionada:

Visita:

http://goo.gl/5veCle

Y TAMBIÉN: ¿?



Pierre Simon Laplace (1740 - 1827) fue un matemático francés que formalizó la teoría de probabilidades en su libro Teoría analítica de las probabilidades. Su increíble capacidad intelectual le hizo sobresalir en campos tan dispares como la astronomía, la mecánica celeste, la geodesia, la teoría de la probabilidad, el cálculo y las ecuaciones diferenciales.

2.5. Teorema de Bayes

En ocasiones, nos interesa calcular la probabilidad de las causas de un suceso compuesto, una vez que este ya se ha producido. Para calcular este tipo de probabilidades, se utiliza el teorema de Bayes:

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera para el que se conoce $P(B / A_j)$, con $j = 1, 2, ..., n$, entonces la probabilidad del suceso A_i condicionada por B es:

$$P(A/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Volvamos al ejemplo anterior.

Ejemplo 25

Tenemos una urna con 7 bolas azules, 5 rojas y 3 negras, y extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Si la segunda bola extraída resultó ser roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera fuera negra?

Comprensión: Teníamos el siguiente planteamiento:

A_1: «La primera bola es azul» A_2: «La segunda bola es azul»
R_1: «La primera bola es roja» R_2: «La segunda bola es roja»
N_1: «La primera bola es negra» N_2: «La segunda bola es negra»

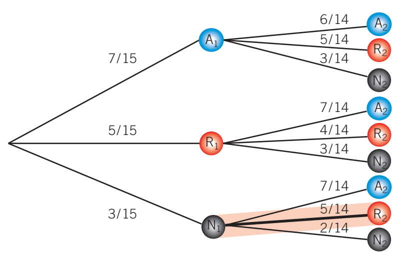


Fig. 5.

Ahora queremos calcular la probabilidad de que la primera bola sea negra, sabiendo que la segunda bola extraída ha sido roja; es decir, deberemos aplicar el teorema de Bayes.

Resolución:
Aplicamos la fórmula definida por el teorema de Bayes:

$$P(N_1/R_2) = \frac{P(N_1) \cdot P(R/N_1)}{P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) + P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + ... P(N_1) \cdot P(R_2/N_1)}$$

Calculamos las probabilidades de cada uno de los sucesos:

$$P(A_1) = \frac{7}{15} \qquad P(R_1) = \frac{6}{16} = \frac{1}{3} \qquad P(N_1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P(R_2/A_1) = \frac{5}{14} \qquad P(R_2/R_1) = \frac{4}{14} \qquad P(R_2/N_1) = \frac{5}{14}$$

Si sustituimos en la fórmula:

$$P(N_1/R_2) = \frac{\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14}}{\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{14}} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{14}$$

Y TAMBIÉN:



https://goo.gl/C47vcd

Thomas Bayes (1702-1761), reverendo presbiteriano y alumno de Abraham de Moivre;- fue el primero en interesarse por las probabilidades de las causas de un suceso observado o probabilidad inversa. Su teoría se sigue estudiando en campos tan dispares como búsquedas de Internet o desarrollos diagnósticos en medicina.

https://goo.gl/zJQ9Eo

Y TAMBIÉN:

$P(B/Aj)$ son probabilidades a priori, es decir, antes de realizar el experimento.
$P(Ai/B)$ son probabilidades a posteriori, o sea, después de realizar el experimento.

TIC

En la siguiente página web encontrarás una demostración del teorema de Bayes, a partir de la fórmula de la probabilidad condicionada:

Visita:

http://goo.gl/XP1wQS

Demuestra, a partir de la fórmula de la probabilidad condicionada, que la fórmula utilizada en el ejemplo es la correcta.

6 Resumen

Datos no agrupados

Datos agrupados

Datos no agrupados

- **Media aritmética**
  - $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum f_i}$
    - Simbología
    - x_i = Dato estadístico
    - f_i = Frecuencia absoluta
    - $\sum f_i$ = Total de la muestra
  - Ponderada
- **Mediana**
  - Número de datos par
  - Número de datos impar
- **Moda**
  - Dato con la mayor frecuencia (más se repite)
- **Desviación media**
  - $DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$
    - Simbología
    - DM = Desviación media
    - X_i = Valor estadístico
    - n = Número de datos
- **Varianza**
  - $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$
    - Simbología
    - σ^2 = Varianza
    - x_i = Dato estadístico
    - $\bar{x}$ = Media aritmética
- **Desviación típica**
  - $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$
    - Simbología
    - σ = Desviación típica
    - x_i = Dato estadístico
    - $\bar{x}$ = Media aritmética

Datos agrupados

- **Media aritmética**
  - $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n}$
- **Mediana**
  - $Me = Lim_{inf} + \frac{\frac{n}{2} - faiant}{f_i} \cdot a$
- **Moda**
  - $Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$

A

1. Los datos estadísticos que describen la edad de 54 participantes de un curso de inglés son:

5 personas de 32	4 personas de 25	1 personas de 40	4 personas de 20	2 personas de 12
3 personas de 29	6 personas de 15	3 personas de 34	5 personas de 16	3 personas de 19
5 personas de 31	2 personas de 23	4 personas de 17	3 personas de 27	2 personas de 18

Determina.

a. La distribución de datos según la información.

b. la media aritmética.

c. La mediana.

Solución

a. La distribución de datos según la información:

32 32 32 32 32 25 25 25 25 40 38 20 20 20 20 12 12 29 29 29 15 15 15 15 15 15 34

34 34 16 16 16 16 16 19 19 19 31 31 31 31 31 31 23 23 17 17 17 17 27 27 27 18 18

b. Media aritmética:

Rango = xmáx – xmin; Rango = 40 – 12 ; Rango = 28

Debemos recordar que el valor 40 no se debe incluir en el extremo superior del intervalo, por lo que es necesario: aumentar y disminuir; así tenemos:

R = 41 – 11; Rango = 29 (resulta número primo).

Una vez más, aumentamos y disminuimos: R = 42 – 12; Rango = 30.

Establecemos los intervalos: Realizaremos cinco intervalos de seis unidades.

Intervalos	x_i	f_i	fai
[12 – 18[	15	17	17
[18 – 24[	21	11	28
[24 – 30[	27	10	38
[30 – 36[	33	14	52
[36 – 42[	39	2	54
		∑fi = 54	∑fai = 1296

Tabla 22.

c. La mediana:

Determinamos $\frac{n}{2} = \frac{54}{2} = 27$, ubicamos $28 < \frac{n}{2} < 38$ y ubicamos el intervalo del valor superior: 24 – 30.

$$Me = Lim_{inf} + \frac{\frac{n}{2} - fainf}{fi} \cdot a; \quad Me = 28 + \frac{27 - 28}{10} \cdot 6\ ; \quad Me = 28 - 0{,}6.$$

Donde Me = 27,4

1 Datos no agrupados

1. Sean las siguientes situaciones, **escribe** dos variables cualitativas y dos cuantitativas que se podría investigar para las situaciones:

   a. en tu colegio
   b. en un supermercado
   c. en un gimnasio
   d. en una empresa

2. Se realiza un estudio para determinar el número de horas que utilizan Internet; le preguntan a José, Juan, Marían, Andrea, Luis, Alejandro, Silvia, Paulina, Jhon y Carlos, estudiantes del décimo año de EGB. ¿Cuántas horas al día usted utiliza el servicio de Internet?

   Identifica la población, muestra, variable y tipo de variable.

3. **Clasifica** las siguientes variables en cualitativas o cuantitativas: edad, ocupación, profesión, hijos, estatura, número de hermanos, deporte preferido, postre preferido.

4. **Describe** dos ejemplos de variables cuantitativas discretas y continuas.

5. Los siguientes valores pertenecen a una encuesta realizada para conocer el número de veces que un estudiante de 1er año de bachillerato revisa su celular en un día.

   23 24 26 27 24 23 26 24 26 27

   23 25 28 26 26 24 27 23 23 27

   28 27 26 27 27 23 23 25 26 25

   25 26 25 26 25 27 27 24 23 27

   Determina:

   a. **Identifica** la variable
   b. **Determina** si es cualitativa o cuantitativa.
   c. **Identifica** si es discreta o continua.
   d. La tabla de frecuencias

6. En el ejercicio anterior, **calcula**:

   a. La media aritmética
   b. La media aritmética ponderada
   c. La mediana
   d. La moda
   e. La desviación media

7. El departamento de investigación de un centro educativo realiza una encuesta que determina la edad de los niños en la sección básica; los resultados fueron: 5, 5, 7, 8, 6, 5, 6, 6, 7, 7, 6, 7, 8, 9, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 7, 9, 8, 7, 7, 5, 5, 6, 7, 7, 9, 10, 8, 9, 9, 6.

   Con la información, **determina**:

   a. El porcentaje de niños mayores de 5 años.
   b. La mediana
   c. La moda
   d. La media aritmética ponderada

8. Se registran los siguientes datos cuando se pretende medir el valor en dólares de un cuaderno de características estándar, teniendo:

   4 valores de 1,25; 5 valores de 1,50; 8 valores de 1,30; 4 valores de 1,40; 6 valores de 1,35; 5 valores de 1,45; 3 valores de 1,33.

   a. **Responde** ¿Cuál es el total de la muestra?
   b. **Responde** Tipo de variable
   c. **Responde** ¿Qué valor registra el mayor porcentaje?
   d. **Responde** ¿Cuál es el valor de la media aritmética ponderada?
   e. **Determina** la mediana y moda.
   f. **Calcula** la desviación media, varianza y desviación estándar de la distribución.

9. En un campeonato de fútbol, se lleva un registro de los goleadores del campeonato, así: Juan tiene 24 goles, Armando 32, Esteban 28, Pedro, Daniel y Jorge 29. En el último cotejo, Juan consigue anotar 4 goles. **Determina** la media aritmética, la varianza y la desviación estándar.

10. A partir de los siguientes resultados de dos clases de 1º de bachillerato en un examen de estadística, determina la clase con mejor rendimiento y la más uniforme.

3º A

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº Estudiantes	2	1	4	5	7	6	2	1	1	1

Tabla 23.

3º B

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº Estudiantes	4	3	3	1	4	5	3	2	2	3

Tabla 24.

11. Se quiere determinar el aumento de peso durante el mes de enero de los leones del zoológico, y se registra los datos en kilogramos:

0,25; 0,56; 0,67; 0,87; 0,67; 0,70; 0,68; 0,70; 0,65; 0,67; 0,80; 0,90; 0,88; 0,78. **Determina** la media aritmética, la media aritmética ponderada, la mediana, la moda y la varianza.

12. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda desviación media, desviación estándar y varianza para: 26, 25, 25, 27, 28, 27, 27, 26, 25, 28, 28, 26, 25, 24, 28, 28, 25, 26, 27, 26, 25 y 26.

Responde: En el caso de eliminarse los números mayores, ¿en qué porcentaje varían todas las medidas estadísticas?

13. En 1º de bachillerato se registran según los paralelos A, B y C, las tablas que registran la nota final quimestral en la asignatura de Matemática, así tenemos:

x_i	f_i
5,78	4
7,25	11
8,35	8
9,25	3
9,56	5

Tabla 25.

x_i	f_i
6,10	6
7,15	13
8,05	4
9,38	4
9,08	3

Tabla 26.

x_i	f_i
6,00	4
7,38	11
8,00	8
8,65	5
9,25	2

Tabla 27.

a. **Responde** ¿Qué porcentaje registra resultados superiores a siete en todos los cursos?

b. **Responde** ¿Qué curso resulto con la mejor media aritmética?

14. **Calcula** la desviación media de los datos de la tabla, correspondientes al número de huevos diarios que ponen las veinte gallinas de un corral durante un mes.

Cantidad diaria de huevos (x_i)	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº días (n_i)	3	4	6	7	4	3	2	1

Tabla 28.

Calcula la varianza y la desviación típica de la distribución.

15. **Calcula** el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente serie de datos: 3, 2, 3, 5, 8, 3, 2, 12, 8, 4, 2, 10, 11.

16. **Determina** el recorrido, desviación media, la varianza, la desviación típica de los siguientes datos.

(x_i)	1	3	5	7	9
(n_i)	25	30	35	20	15

Tabla 29.

17. **Calcula** la media, mediana, moda, desviación media, varianza y desviación típica de estas dos series de datos:

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55, 55

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55, 55, 55

18. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos, correspondiente al número de hijos de varias familias encuestadas: 2, 3, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 1. 4, 0, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2.

Elabora la tabla

19. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos, correspondiente al número de hijos de varias familias encuestadas: 2, 3, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 1. 4, 0, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2.

Elabora la tabla

20. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de los datos de esta tabla, correspondientes al número de llamadas telefónicas que cada abonado de una localidad recibe diariamente.

(x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(n_i)	82	125	323	624	682	448	270	92	47	7

Tabla 30.

¿Qué puedes decir sobre la dispersión de los datos?

21. **Determina** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de cada una de estas distribuyciones de datos, previa confección de las tablas adecuadas.

a.

(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(n_i)	12	15	9	18	17	15	11	6	8

Tabla 31.

b.

(x_i)	18	19	20	21	22	23	24	25
(n_i)	3	12	54	66	57	55	18	11

Tabla 32.

2 Datos agrupados

22. **Determina** el rango y el número de intervalos de los siguientes valores:

23 21 22 27 24 23 22 24 26 27

23 24 28 26 26 24 27 28 28 27

28 27 26 27 27 24 22 39 26 25

25 26 25 26 25 29 27 24 36 27

23. Con los datos del ejercicio anterior, **aumenta** los valores 25, 28, 35, 32 y 22, luego vuelve a determinar el rango, número de intervalos y marca de clase.

24. **Completa** los valores de la tabla de datos con intervalos.

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[110 – 120[	115	5	
[120 – 130[	125	7	
[130 – 140[		15	
[140 – 150[		3	
[140 – 150[		21	
[160 – 170[		14	

Tabla 33.

25. Considerando la tabla de valores del ejercicio anterior, **determina**:

a. El número de datos en la muestra.

b. La media aritmética.

c. Los valores de la columna de frecuencia absoluta acumulada.

26. Se realiza una campaña de vacunación, las personas beneficiadas en las jornadas de trabajo según los datos son:

32 44 42 36 54 32 62 78 46 77

63 77 90 26 13 25 57 68 78 47

36 54 32 62 78 63 77 90 25 43

32 29 27 24 27 24 36 90 26 13

63 77 90 25 90 26 13 25 33 36

Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados, **calcula** el rango, el número de intervalos que considere adecuados, la media aritmética, la mediana y la moda.

27. Los siguientes valores pertenecen a una encuesta realizada para conocer el número de consultas de medicina general en una casa de salud.

22 32 24 26 27 24 23 26 24 26
23 35 31 26 26 24 37 24 28 27
28 37 26 27 27 23 32 29 26 25
25 36 35 33 25 27 27 28 23 36
23 32 29 26 25 37 26 27 27 23

Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados y **calcula** el rango, el número de intervalos para analizar la variable, además de los valores de: media aritmética, mediana moda.

28. En el ejercicio anterior, si se atendió diez días más, y se registra:

36, 35, 33, 15, 37, 22, 29, 23, 36, 32. Determina los nuevos valores de la media aritmética, mediana y moda.

29. **Considera** la distribución de datos agrupados en intervalos que aparece en la tabla y **calcula** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Intervalo	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)
(n_i)	2	4	7	5	8

Tabla 34.

30. **Confecciona** las tablas adecuadas y determina la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos.

Intervalo de clase	[1,3)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
(n_i)	52	35	41	22	36

Tabla 35.

31. En base a la siguiente tabla **calcula** la media, mediana y moda:

x_i		n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
[0,1)	0,5	2	2	1
[1,2)	1,5	4	6	6
[2,3)	2,5	7	13	17,5
[3,4)	3,5	5	18	17,5
[4,5)	4,5	8	26	36
[5,6)	5,5	7	33	38,5
[6,7)	6,5	9	42	58,5
[7,8)	7,5	5	47	27,5
		47		2121,5

Tabla 36.

3 Experimentos aleatorios

32. **Justifica** si los siguientes experimentos son aleatorios o no:

a. Extraer una bola de una urna con el mismo número de bolas rojas que blancas.

b. Extraer una bola de una urna donde únicamente hay bolas blancas.

c. Determinar el tiempo de caída de un cuerpo desde 1 m de altura y con masa conocida.

33. Una urna contiene 3 bolas verdes, 1 amarilla y 2 blancas. **Describe** el espacio muestral si:

a. Extraemos dos bolas con reemplazamiento.

b. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento.

34. En las semifinales del Mundial de Fútbol, se enfrentan 4 equipos: España, Italia, Brasil y Argentina. **Describe** el espacio muestral de los partidos que se podrían jugar.

4 Sucesos

35. Sacamos una bola de una bolsa que contiene 1 bola roja, 1 blanca y 1 negra, y a continuación lanzamos un dado. **Describe** el espacio muestral y los siguientes sucesos:

a. Obtener una bola roja y un número impar.

b. Obtener una bola que no sea blanca y un múltiplo de 3.

c. Sacar un 2 en el dado y una bola negra.

d. Sacar una bola que no sea blanca y un número que no sea impar.

36. Sea $\Omega = \{a,b,c,d,e, f, g,h, i, j\}$ el espacio muestral de un experimento, consideramos los siguientes sucesos:

$A = \{a,e, f, g, j\}$ $\quad C = \{a,c,e, g\}$

$B = \{a,e, i\}$ $\quad D = \{b,c,d,e, f\}$

Determina:

a. $A \cap \overline{B}$ e. $D - (B \cap C)$

b. $\overline{A} \cap \overline{B}$ d. $C \cup \overline{D}$

c. $B \cup (\overline{C \cap D})$ f. $(A \cup B) - (C \cap D)$

5 Probabilidad

37. Tenemos una urna con 3 bolas verdes, 1 azul, 2 blancas y 4 rojas. Extraemos una bola. **Calcula** la probabilidad de que la bola extraída:

a. Sea verde. b. Sea blanca. c. No sea roja.

38. Al lanzar dos dados, se suman los resultados. **Describe** el espacio muestral. ¿Son todos los resultados igual de probables? **Halla** sus probabilidades.

39. **Calcula** la probabilidad de que, al lanzar dos dados, la suma de los resultados sea:

a. Múltiplo de 3. b. Divisible por 4.

40. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, **calcula**:

a. $P(A \cup B)$ b. $P(A)$ c. $P(A \cap B)$ d. $P(A \cap B)$

41. En las pruebas para obtener el carné de conducir, la probabilidad de superar la parte teórica es 0,45; la práctica, 0,4; y ambas, 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de superar alguna prueba?

42. Para comprar un antivirus, una empresa de videojuegos hace un estudio en 600 ordenadores durante un mes:

	Ordenadores con virus	Ordenadores sin virus
Con fallos de software	17	40
Sin fallos	23	520

Tabla 37.

¿Cuál será la probabilidad de que se produzcan fallos en el software? ¿Y de que se infecte con algún virus?

43. Irene y María han quedado esta tarde. La probabilidad de que Irene llegue tarde es 0,34. La probabilidad de que llegue tarde María es 0,2. La probabilidad de que lleguen las dos tarde es 0,1. **Calcula**:

a. La probabilidad de que alguna llegue tarde.

b. La probabilidad de que ninguna llegue tarde.

44. Lanzamos un dado en el que la probabilidad de que salga impar es el doble de que salga par. ¿Cuál es la probabilidadde que no salga divisor de 6?

Para finalizar

1. Para las siguientes afirmaciones, escribe V si es verdadero o F inicial de falso según corresponda:

a. La población, en estadística, es un subconjunto de la muestra.

b. El género musical preferido es una variable cualitativa.

c. El valor total de todas las frecuencias relativas es 100.

d. Cuando el número de datos es impar, la mediana se ubica en el valor central de los datos estadísticos.

e. El valor de la mediana en: 6, 5, 7, 8, 8, 9, 9 es 8.

f. La moda en: 8, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 7, 6, 6, 8 es 6 y 8.

g. La mediana se identifica porque presenta la mayor frecuencia absoluta.

2. Considerando los siguientes datos: 8, 7, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 2, 8, 5, 4, los valores de la media aritmética, la mediana y la moda son correspondientemente:

a. 4,5 3 5,17

b. 8 6 5,17

c. 5,17 4,5 3,0

d. 5,17 3,0 4,5

3. Sean los valores: 9, 6, 3, 8, 4, 5. El valor que se deba aumentar a los datos para que la media aritmética sea 6, es:

a. 10 c. 2

b. 11 d. 7

4. Se realiza un estudio para analizar el tiempo de espera, en tramitar documentos, los resultados obtenidos en minutos para 50 personas que acudieron en un día de atención, fueron:

12 23 22 19 34 33 32 45 33 20

18 21 26 27 46 34 37 38 42 43

12 23 50 19 34 33 50 48 33 20

18 21 47 27 31 34 37 38 42 43

35 32 45 27 52 34 37 36 23 22

5. Considerando los datos indicados, el valor del rango y el número de intervalos es:

a. Rango = 40,8 intervalos de diez unidades.

b. Rango = 30,6 intervalos de cinco unidades.

c. Rango = 50,5 intervalos de diez unidades.

d. Rango = 40,8 intervalos de cinco unidades.

6. Sea la siguiente tabla de frecuencias para datos agrupados correspondientes al recorrido en kilómetros de un vehículo:

Intervalos	Xi	fi	xi·fi	Fai
[10 – 35[	22,5	2	45	2
[35 – 60[	47,5	5	237,5	7
[60 – 85[	72,5	7	507,5	14
[85 – 110[	97,5	12	1170	26
[110 – 135[	122,5	9	1102,5	35
		35	3062,5	

Tabla 38.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? | ¿He cumplido mis tareas? | ¿Qué aprendí en esta unidad?

- Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras? | ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.

- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

ZONA

NOTICIA

Redes bayesianas

En el año 2011, investigadores de la Universidad de Granada determinaron hasta 18 variables que pueden intervenir en un accidente mortal de tráfico, y solo con 7 de ellas ya es posible construir modelos probabilísticos basados en las **redes bayesianas**.

Entra en la red y accede a http://links.edebe.com/myeyaq, donde podrás encontrar más información al respecto. ¿Cuáles son estas 7 variables fundamentales? ¿En qué teorema probabilístico se basan?
Busca información sobre otros ámbitos (científicos, técnicos, sociales...) en los que se pueden realizar modelos probabilísticos basados en las redes bayesianas. ¿Qué utilidad pueden tener dichos modelos?

SENTIDO CRÍTICO

¿LA INTUICIÓN ENTIENDE DE PROBABILIDADES?

- En una administración de lotería, a una persona le dan a escoger entre el número 00 005 y el 48 679. ¿Qué número crees que escogerá? ¿Cuál es el razonamiento para elegir un número u otro? ¿Es un razonamiento matemático?
- Si a esta misma persona le dicen que en el último sorteo el primer premio fue para el número 48 679, ¿qué número crees que escogerá? ¿Cuál será su razonamiento?

  ¿Es un razonamiento matemático?
- En una clase de 30 estudiantes, están discutiendo la probabilidad de que, como mínimo, dos de ellos hayan nacido el mismo día. ¿A qué conclusión crees que llegarán? ¿Cuál es su razonamiento? ¿Es un razonamiento matemático?

SOCIEDAD

El nacimiento de la estadística aplicada

Esta frase es del matemático y pensador británico Karl Pearson (1857-1936) que, entre otros aspectos, estableció las bases de la estadística matemática del siglo XX, llegando a definir los conceptos de desviación típica, correlación y análisis de la regresión.
Entra en Internet y averigua qué relación guardaba Pearson con otro científico británico y primo de Charles Darwin, Francis Galton (1822-1911), en cuanto al concepto de correlación que ambos trabajaron.
Se sabe que el valor del coeficiente de correlación de Pearson esta comprendido entre -1 y 1, y que existe una escala graduada que interpreta diferentes intervalos de valores de este coeficiente. Busca en Internet información sobre esta escala y qué significado otorga a cada grupo de valores.

SI YO FUERA....

Ingeniero estadístico



https://goo.gl/Pze9tO

Si yo fuera ingeniero estadístico, mediante técnicas estadísticas y la complementación de herramientas computacionales, analizaría los datos del censo poblacional, determinando las medidas estadísticas de las variables consideradas en el censo, para luego entregar resultados como:

- ocho de cada diez personas tiene casa propia.
- cuatro de cada diez familias disponen del servicio de Internet.
- Cada familia ecuatoriana tiene en promedio 2 hijos.

Proyecto

LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN CIFRAS DE RENDIMIENTO Y LAS PROBABILIDADES



http://goo.gl/RUqUIQ

ELEGIMOS

La **estadística descriptiva** utiliza procesos tales como la recolección, el ordenamiento, el análisis y la representación de un conjunto de datos con el propósito de describir algunas características.

La estadística, al igual que otras ciencias, ha tenido un proceso evolutivo, desde la antigüedad, mediante censos y registro de personas (empadronamiento).

Las técnicas estadísticas hallan plena aplicación en el campo educativo a través del análisis de rendimiento educativo, estudiando variables cuantitativas como: las calificaciones parciales obtenidas durante los dos períodos de evaluación (quimestres), sus correspondientes frecuencias relativas y absolutas, etc., con la finalidad de tomar decisiones para alcanzar los objetivos educativos.

PLANIFICAMOS

Formen grupos de cuatro estudiantes que vivan en sectores comunes, de preferencia. Cada grupo de trabajo realizará las siguientes actividades:

Realicen una encuesta en la cual se pueda investigar las siguientes variables: género, las notas obtenidas en el primer y segundo quimestre de la asignatura de Matemáticas.

Apliquen la encuesta en los diferentes paralelos a todos los estudiantes.

Luego de realizar la encuesta, **elaboren** una tabla de frecuencias para cada paralelo en las variables género y notas obtenidas.

Investiguen en Internet sobre los gráficos estadísticos de diagramas de barras y diagramas circulares.

Realicen un diagrama de barras para el género y las notas obtenidas de cada paralelo, es decir si hay cuatro paralelos se deben presentar ocho diagramas.

Elaboren diapositivas con el título: Aplicaciones de la estadística, y **esquematicen** una presentación de los resultados obtenidos.

DESARROLLAMOS

En la encuesta, las opciones para la variable «género» son femenino y masculino.

Realiza una tabla de frecuencias para datos no agrupados en la variable género.

Las notas obtenidas de igual manera se organizan en tablas y se realiza una tabla de frecuencias con datos agrupados.

Responde las siguientes preguntas:

a. El tipo de variables que se investiga.

b. **Determina** las medidas de tendencia central, media aritmética, mediana, moda, varianza, desviación típica, desviación estándar para cada paralelo, tanto en la tabla de datos agrupados y no agrupados.

c. **Responde** ¿Qué paralelo obtuvo el mayor valor de la media aritmética?

d. **Responde** ¿Cuántos estudiantes de cada paralelo tiene una nota mayor o igual a siete puntos?

e. **Responde** ¿Qué porcentaje representa este aspecto en cada paralelo?

f. **Responde** ¿Cuántos estudiantes de cada paralelo tiene una nota menor a siete puntos?

g. **Responde** ¿Qué porcentaje representa este aspecto en cada paralelo?

h. **Responde** ¿Cuántos estudiantes tienen una nota mayor o igual a nueve de cada paralelo?

i. Relacionando la información de los literales h y b ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante obtenga notas satisfactorias?

j. De igual manera **determinen** la probabilidad para que un estudiante obtenga notas buenas

   Sugerencia: Considerar las notas mayores que siete como nota buena

k. **Propongan** cuatro recomendaciones para que este fenómeno educativo optimice sus cifras.

Un alto en el camino

1. Para las siguientes afirmaciones, escribe V si es verdadero o F si es falso según corresponda:

a. La muestra en estadística es un subconjunto de la población.

b. El género musical preferido es una variable cualitativa.

c. El valor total de todas las frecuencias relativas es 100.

d. La ecuación de la elipse con eje mayor en el eje x es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

e. El valor de la mediana en: 6, 5, 7, 8, 8, 9, 9 es 8.

f. La moda en: 8, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 7, 6, 6, 8 es 6 y 8.

g. Según la ecuación $x^2 + y^2 = 16$ el valor del radio es 4.

h. El producto escalar es conmutativo

i. El producto $\mathbf{i} . \mathbf{i} = 1$.

2. Considerando los siguientes datos : 8, 7, 6, 5, 8, 6, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 4, 8, 5 los valores de la media aritmética, la mediana y la moda son correspondientemente:

	$\bar{x}$	Me	Mo
a.	5,73	6	8
b.	7,53	4	5
c.	3,57	5	4
d.	5,73	8	6

3. Si la mediana entre cinco números es 13, **determina** la media aritmética de los números.

a. 11

b. 12

c. 13

d. 9

4. La ecuación de la recta paralela a la recta $4x + y = -5$, que pase por el punto $(-3, -4)$, es:

a. $4x + y = -4$

b. $4x + y = -16$

c. $4x - y = -16$

d. $4x - y - 16 = 0$

5. La ecuación de la recta perpendicular a la recta $2y = 4x - 3$, que pasa por el punto $(-1, -2)$ es:

a. $x - 2y - 5 = 0$

b. $2x - y - 5 = 0$

c. $x + 2y + 5 = 0$

d. $2x + y + 5 = 0$

6. Se realiza un estudio para analizar el número de pacientes que fueron atendidos en una casa de salud; los resultados obtenidos fueron:

12 25 29 32 45 33 20 18 46 34 37 38 35
43 12 23 50 19 34 33 50 48 33 11 18
21 47 27 31 34 37 38 42 43 35 32 45
27 52 34 37 36 23 42

Con la información, **determina** el rango, el número de intervalos adecuados y **calcula** la media aritmética.

7. Según la ecuación general:

$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$

La ecuación canónica, las coordenadas de la circunferencia así como el valor del radio son:

a. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 25 = 0$; C $(-3,5)$; $r = 3$

b. $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 25 = 0$; C $(3,-5)$; $r = 16$

8 Sea la ecuación

$x = 4 + 3p$

$y = 1 - p$

Determina:

a. Los valores de x_1; y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

9 **Considera** la gráfica con los vectores,

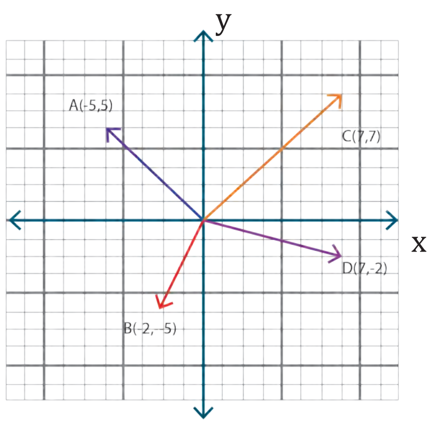


Fig. 6.

Determina:

a. El módulo o norma de cada vector

b. El producto A · B

c. El producto B · D

d. El ángulo entre A y D

10 Dados los valores: 9, 6, 3, 8, 4, 5; el valor que se deba aumentar a los datos para que la media aritmética sea 6 es:

a. 10

b. 11

c. 2

d. 7

11 En determinada clase, 12 estudiantes escriben en un papel las notas del primer, los resultados fueron

3, 25; 8,34; 6,00; 8,17; 2,35; 4,57; 6,12 7,78; 8,91; 6,63; 4,67; 8,12

La probabilidad de que, al extraer un solo papel, la nota extraída sea mayor que 5 y menor que 8 es:

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{4}$

c. 4

d. $\frac{1}{2}$

12 Dados los vectores:

$\overrightarrow{A} = -\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\overrightarrow{B} = -8\vec{i} - 2\vec{j}$.

Determina la magnitud de los vectores y la distancia que hay entre ellos.

13 Sea la siguiente tabla de frecuencias para datos agrupados correspondientes a las calificaciones de un examen psicológico sobre 100 puntos.

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	fa_i
[10 – 30[	20	4	80	4
[30 – 50[	40	6	240	10
[50 – 70[	60	9	540	19
[70 – 90[	80	15	1200	34
[90 – 110[	100	8	800	42
		42	1060	

Tabla 39.

Determina los valores de la media aritmética y la moda según la tabla de frecuencias para datos agrupados.

BIBLIOGRAFÍA

— ALSINA, C. TRILLAS, E. (1996). *Lecciones de álgebra y geometría*. Barcelona: Ed. Gustavo Gili.

— APÓSTOL, T. M. (1999). *Calculus* (2 vol.). Barcelona: Ed. Reverté, 2.ª edición.

— BARTLE, R. G y SHERBERT, D. R. (1996). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Ciudad de México: Ed. Limusa, 2.ª edición.

— BERNIS, F., MALET, A. y MOLINAS, C. (1999). *Curso de problemas de matemáticas*. Madrid: Ed. Noguer.

— BOYER, C. B. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza editorial.

— COURANT, R. y ROBBINS, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Ed. Aguilar.

— CUADRAS, C. M. (1999). *Problemas de probabilidades y estadística*. 2 vol. Barcelona: PPU.

— Colección «Matemáticas: cultura y aprendizaje». Madrid: Ed. Síntesis.

— DE GUZMÁN, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Ed. Labor.

— GRANDVILLE, W. A. (2009). Cálculo diferencial e integral. Limusa.

— HUSSING, H. y ARNOLD, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

— KLINE, M. (1974). *Matemáticas en el mundo moderno*. Barcelona: Ed. Blume.

— MASON, S. (1996). *Historia de las ciencias*. 5 vols. Madrid: Alianza editorial, 4.ª reimpresión.

— MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC y Ed. Labor.

— MATAIX, J. L. (1970). *Teoría de errores*. Madrid: Ed. Dossat.

— PAPOULIS, A. (1980). P*robabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos*. Barcelona: Ed. Eunibar.

— POLYA, G. (1992). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Ciudad de México: Ed. Trillas.

— QUEYSANNE, M. (1999). *Álgebra básica*. Barcelona: Ed. VicensVives, 2.ª edición.

— RAMOS, A. (2003). *Ejercicios de geometría*. Madrid: Ed. Tebar Flores.

— SPIVAK, M. (1995). *Calculus*, Barcelona: Ed. Reverté, 2.ª edición.

— SERRES, M. (2001). *Historia de las ciencias.* Madrid: Ed. Cátedra, Colección Teorema.

— XAMBÓ, J. (1977). *Álgebra lineal y geometrías lineales*. Barcelona. Ed. Eunibar.

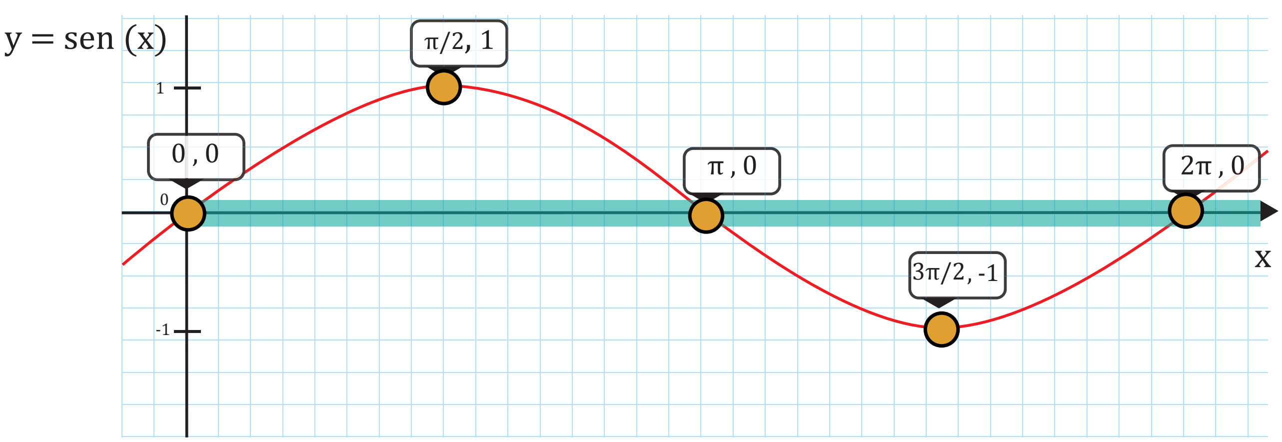
— WHIMBEY, A. y LOCKHEAD, J. (2003). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Visor Distribuciones.

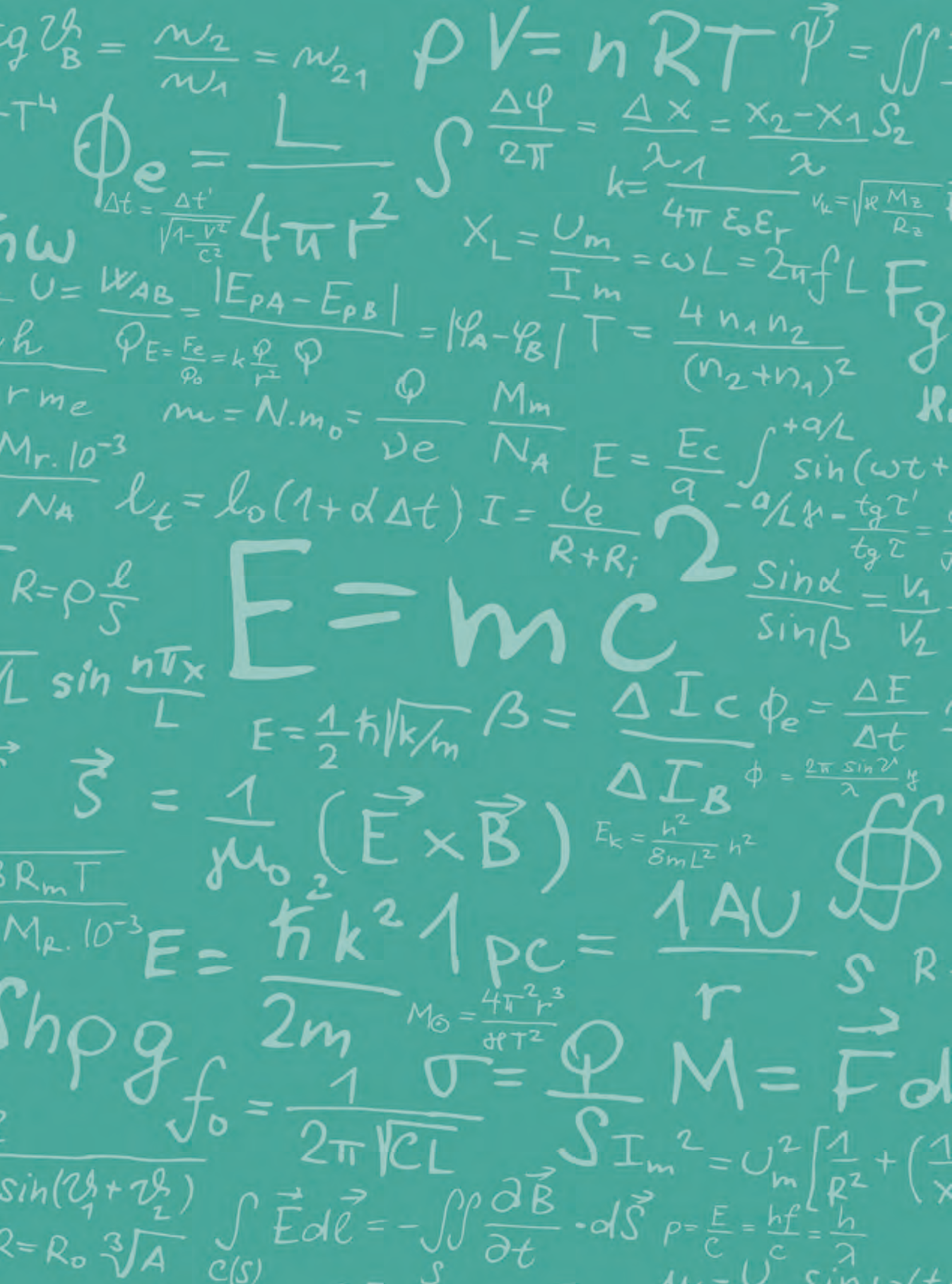
Láminas de apoyo

OPERACIONES CON FUNCIONES

Adición	Sustracción
La función suma de f y g es la función que asigna a cada número real x la suma de las imágenes por la función f y por la función g: $f + g : x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$	La función diferencia de f y g es la función que asigna a cada número real x la diferencia de las imágenes por la función f y por la función g: $f - g : x \rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	**División**
La función producto de f y g es la función que asigna a cada número real x el producto de las imágenes por la función f y por la función g: $f \cdot g : x \rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	La función cociente de f y g es la función que asigna a cada número real x el cociente de las imágenes por la función f y por la función g: $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; g(x) \neq 0$

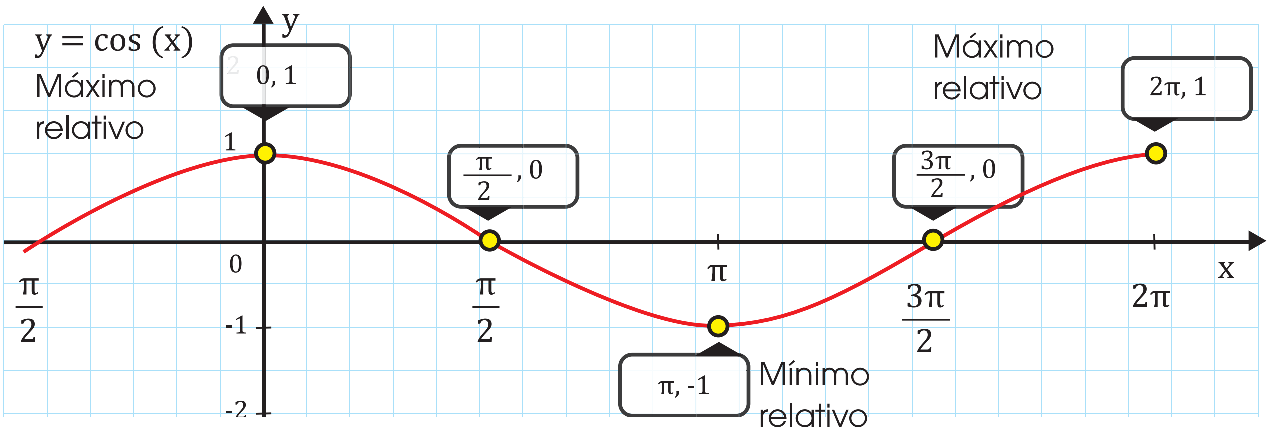
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO



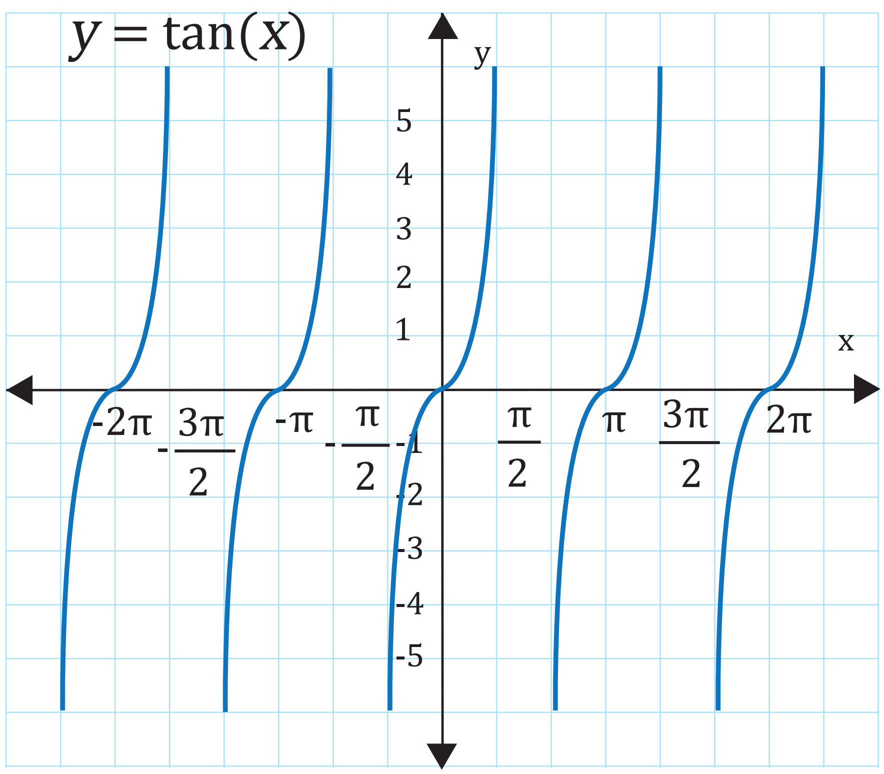


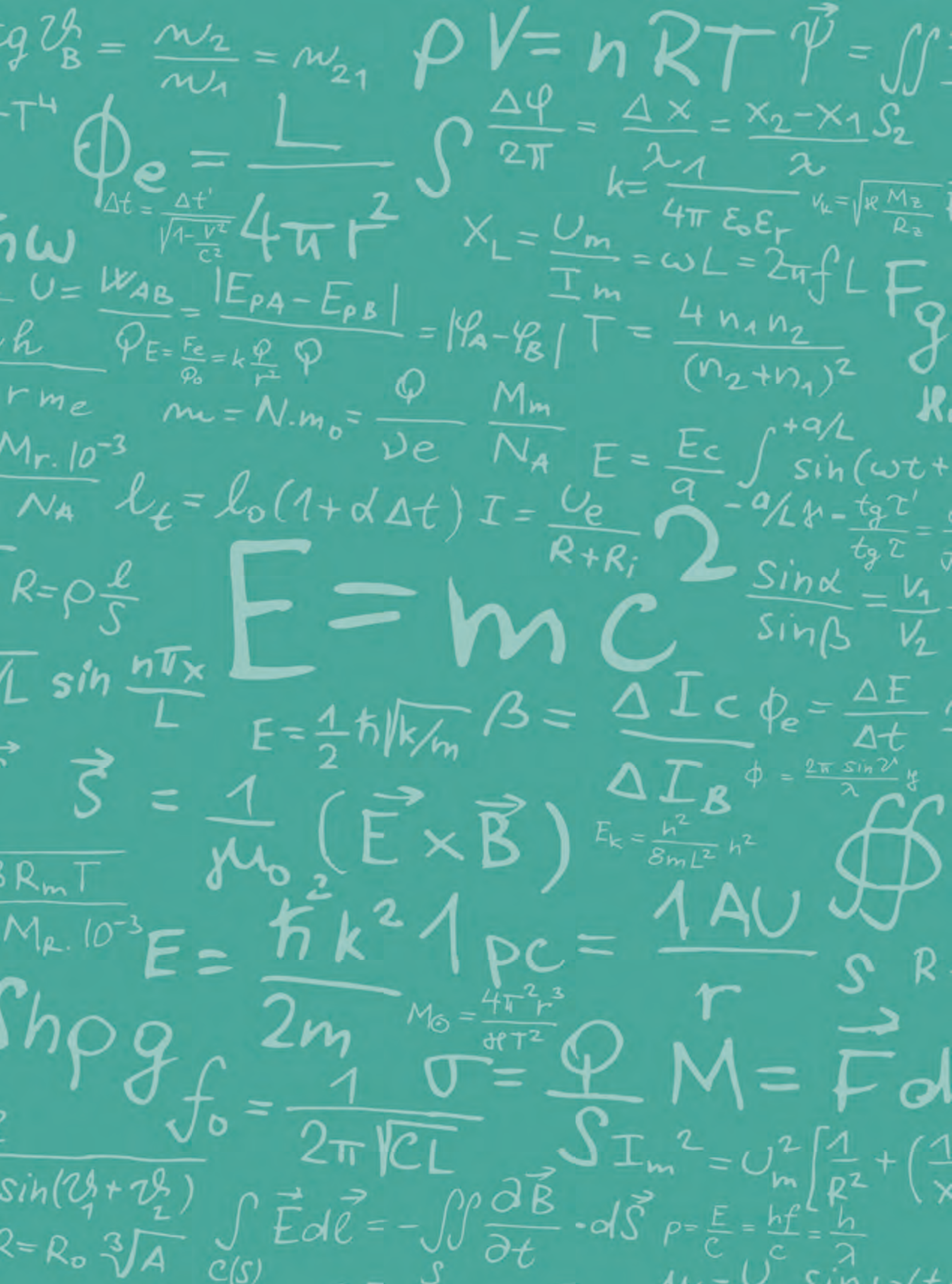
pV=nRT
E=mc2
R=ρ l/S
lt=l0(1+αΔt)
M=Fd
1 pc = 1 AU / r

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

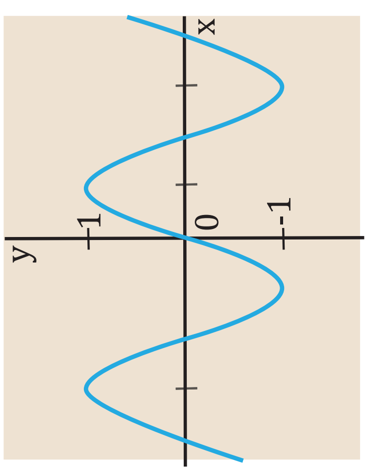


GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

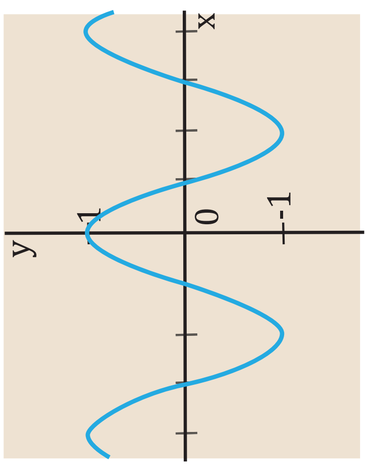



pV = nRT
E = mc²
R = ρ l/S
l_t = l_0(1 + αΔt)
I = U_e/(R + R_i)
S = 1/μ_0 (E × B)
f_0 = 1/(2π√CL)
1 pc = 1 AU/r
σ = Q/S
M = F d
m = N.m_0 = Q/ve Mm/N_A
T = 4 n_1 n_2/(n_2 + n_1)²
X_L = U_m/I_m = ωL = 2πfL
sin α/sin β = V_1/V_2

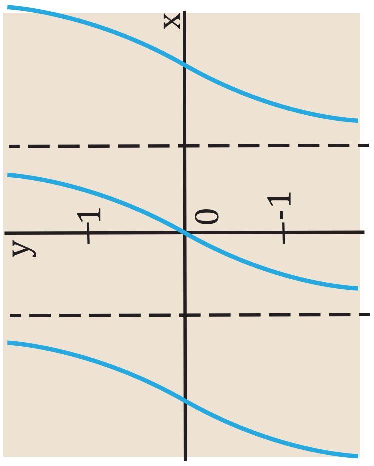
CUADRO COMPARATIVO ENTRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



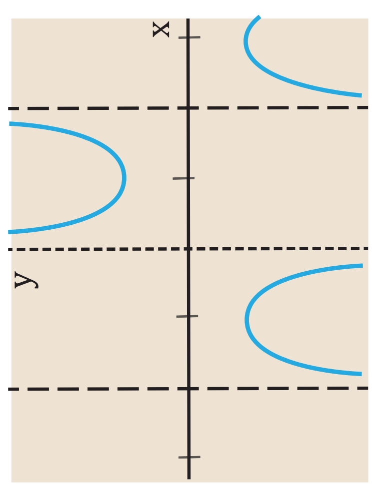
$y: x \mapsto y = \text{sen}(x)$



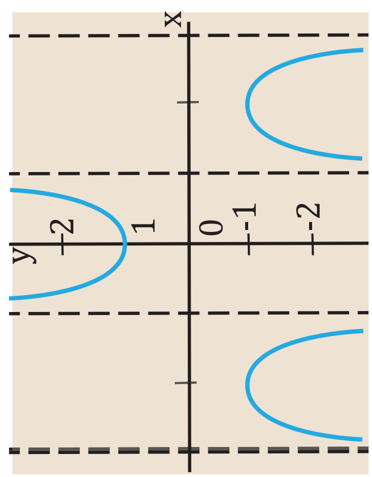
$y: x \mapsto y = \cos(x)$



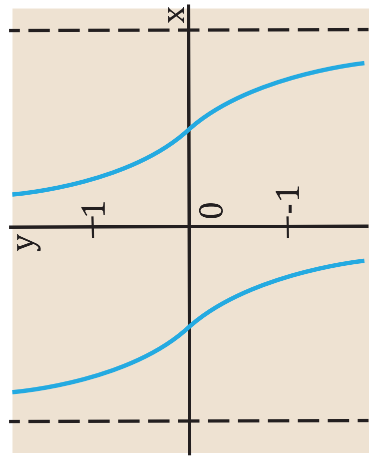
$y: x \mapsto y = \tan(x)$



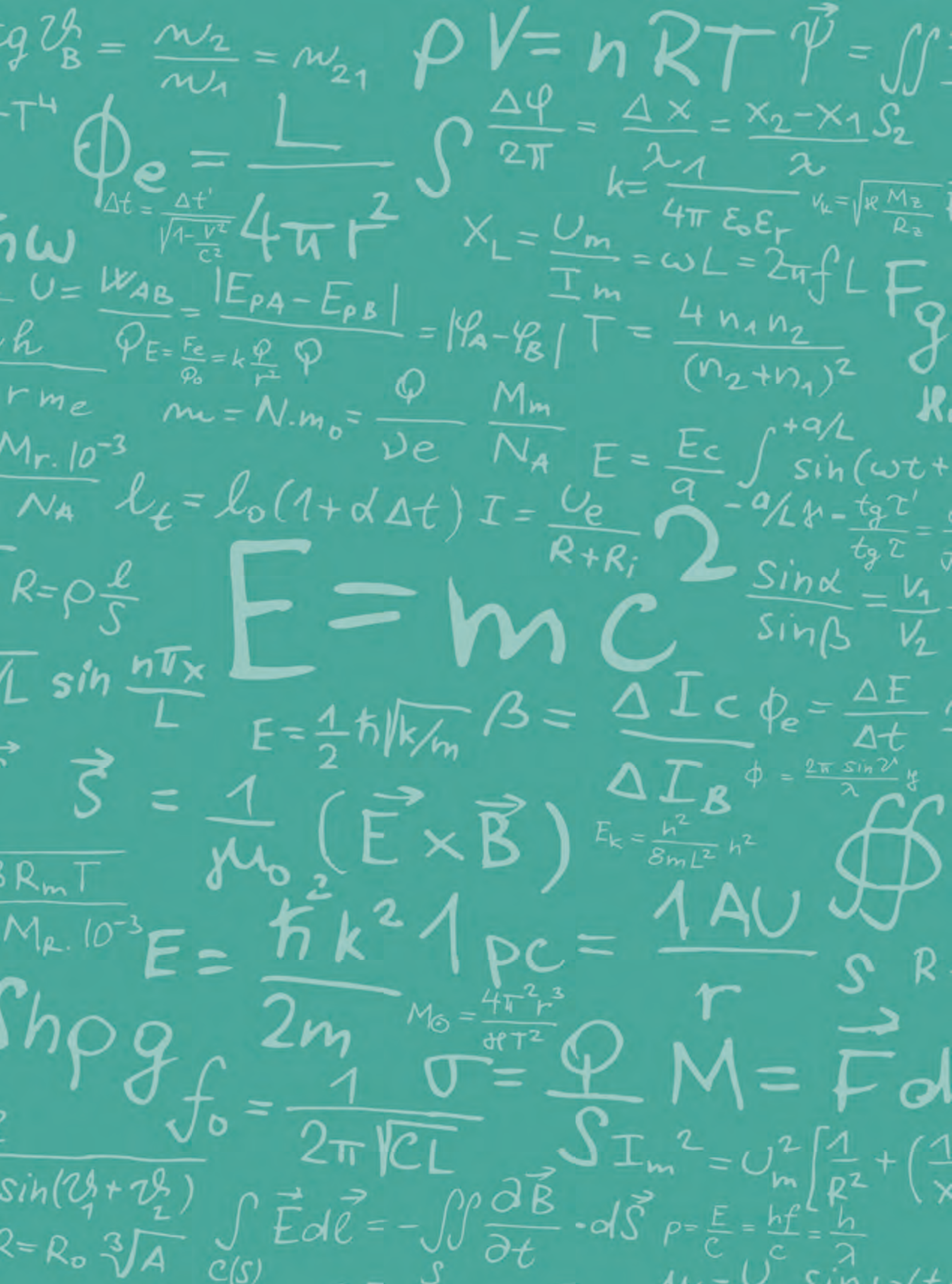
$y: x \mapsto y = \csc(x)$



$y: x \mapsto y = \sec(x)$



$y: x \mapsto y = \cot(x)$



pV = nRT
E = mc²
S = 1/μ₀ (E × B)
R = ρ l/S
lt = l₀(1 + αΔt)
m = N.m₀
XL = Um/Im = ωL = 2πfL
E = Ec/a
σ = Q/S
M = Fd
f₀ = 1/(2π√CL)
1 pc = 1 AU
p = E/c = hf/c = h/λ